# CURSO DE PREPARACIÓN

## 1ºGEA

Universidad de Navarra | ESCUELA DE ARQUITECTURA

*"La geometría solucionará los problemas de la Arquitectura."*

Le Corbusier

*Pamplona, febrero de 2024*

Estimado estudiante:

Soy **Pablo Arza**, Subdirector de Estudiantes y Ordenación Académica de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad de Navarra. Antes que nada, me gustaría darte la enhorabuena por tu admisión al Grado en Estudios de Arquitectura de nuestra Universidad.

Te escribo porque quisiera compartir contigo algunas consideraciones que creo que te serán de ayuda para tener un buen desempeño académico en 1º de Arquitectura.

En primer lugar es necesario que tengas en cuenta que los hábitos de trabajo y estudio en la carrera son diferentes a los de la etapa escolar, siendo necesario incrementar las horas de dedicación, con un ritmo de estudio constante y eficaz desde el inicio del curso.

La experiencia acumulada en la Escuela nos indica que existe una altísima correlación entre la nota de bachiller y los resultados académicos en los estudios de Arquitectura. Dicha experiencia nos dice que los candidatos con una media inferior a un 7 en bachiller, con notas en matemáticas y física igual o inferiores a 6, cuentan con más probabilidades de tener dificultades. Por tanto, los estudiantes con bajas calificaciones en las asignaturas de matemáticas y/o física en el colegio, deben de aprovechar el tiempo antes de empezar el Grado en Estudios de Arquitectura para seguir trabajando con intensidad esas materias de segundo de bachiller, en especial las matemáticas.

Por todos estos motivos, te recomendamos que adquieras una buena base en materias como matemáticas, física y dibujo técnico. Para ello, hemos preparado un cuaderno con teoría y ejercicios que te ayude a trabajar la base técnica que se espera para poder empezar con buen pie bien el Grado en Estudios de Arquitectura. Confiamos en que te sea de ayuda.

Recibe un cordial saludo.

Pablo Arza Garaloces

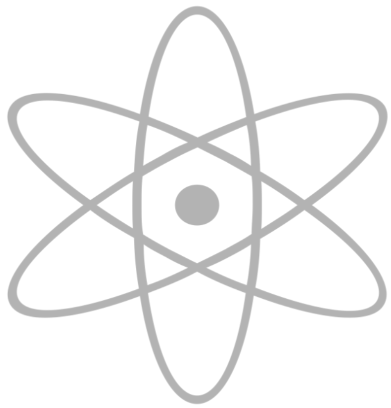
# FÍSICA

Estimado estudiante,

Soy **José Manuel Cabrero**, director del departamento de construcción, Instalaciones y Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad de Navarra.

A través de este curso cero pretendemos enseñaros a pensar de manera activa, dejando atrás los métodos de enseñanza pasiva, más propios del colegio. No pretendemos que aprendáis muchas cosas, sino que os fijéis en cómo aprendemos, en cómo hemos adquirido estos conocimientos. Para ello, es vital fijarnos en la actitud ante los problemas planteados (no tanto, la aptitud).

Un consejo: aprended a mirar el mundo preguntándonos por qué ocurren las cosas. Inquirir en los cómos y porqués, razonar sobre lo que ocurre a su alrededor. Buscar la información necesaria para entenderlo. Plantear hipótesis y comprobar su veracidad. Eso es lo verdaderamente importante.



Los contenidos que se trabajarán en **física** (y convendría repasarlos en la medida de lo posible a lo largo de este curso) son los siguientes:

La medida Sistemas de unidades y conversión
**Estudio de movimientos** Sistemas de referencia. Tratamiento vectorial de movimientos. Movimientos con trayectoria rectilínea.
**Dinámica.** Concepto de fuerza. Las leyes de la dinámica de Newton. Cantidad de movimiento y principio de conservación.
**La energía y su transferencia: trabajo y calor** Los conceptos de energía, trabajo y calor y sus relaciones. Eficacia en la realización de trabajo: potencia. Formas de energía. Principio de conservación y transformación de la energía.
**Electricidad**
**Naturaleza de la materia** Hipótesis de Avogadro. Número de Avogadro. Leyes de los gases.
**Interacción gravitatoria** Ley de la gravitación universal. El trabajo de las fuerzas conservativas. Energía potencial gravitatoria. Conservación de la energía mecánica.
**Interacción electromagnética** Campo eléctrico. Magnitudes que lo caracterizan: intensidad de campo y potencial eléctrico. Relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Campos magnéticos creados por corrientes eléctricas: experiencia de Örsted. Inducción electromagnética: leyes de Faraday y Lenz. Producción de energía eléctrica.
**Razones trigonométricas** de un ángulo cualquiera. Identidades trigonométricas. Teorema del seno y del coseno. Resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos. Razones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y del ángulo mitad.
**Vectores en el plano** Operaciones: suma, resta y producto de un escalar. Producto escalar de dos vectores. Propiedades. Módulo de un vector. Ángulo entre vectores.
**Ecuaciones de la recta** Vector direccional y pendiente. Cálculo de distancias entre puntos y rectas. Ángulo de dos rectas.
**Lugares geométricos del plano** Mediatriz de un segmento. Bisectriz de un ángulo. Cónicas.
**Integrales definidas**. Teorema del valor medio. Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas.

# Ejercicios planteados

**Ejercicio 1** El cuerpo de masa 10 kg (ver figura) tiene un coeficiente de rozamiento con el suelo del plano inclinado $\mu = 0{,}1$ y pasa por el punto **A**, hacia arriba, con una velocidad de 10 m/s.

Si **B** es el punto más alto hasta el que va a llegar el cuerpo, calcular la distancia $\overline{\mathrm{AB}}$ y la velocidad con la que el cuerpo volverá a pasar por el punto **A** en su descenso. El plano inclinado forma un ángulo de 30° con la horizontal.


**Solución.**
$\overline{\mathrm{AB}} = 8{,}7\,\mathrm{m}$; $v = 8{,}39\,\mathrm{m/s}$

**Ejercicio 2** Con referencia al problema número .1, ¿cuanto tiempo transcurrirá entre los dos pasos del cuerpo por el punto **A**?

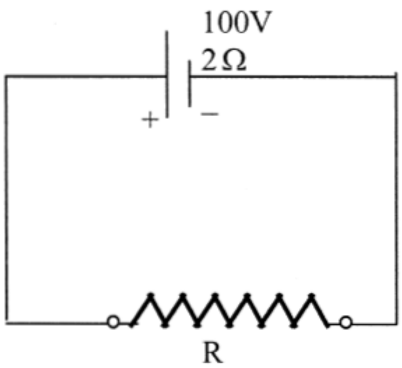
**Solución.**
3,81 s

**Ejercicio 3** Una bombilla eléctrica no es, en definitiva, más que una resistencia eléctrica que cuando soporta una intensidad de corriente adecuada se pone incandescente e ilumina. Según eso, si adquirimos una bombilla en la que se lee 220 V – 100 W, ¿qué resistencia hemos adquirido?

**Solución.**
484 Ω

**Ejercicio 4** Disponemos de una pila de 100 V de fuerza electromotriz y 2Ω de resistencia interna.

Se desea saber cuál debe ser el valor de la resistencia $R$ para que formando un circuito con aquella pila y esta resistencia (ver figura) se obtenga la mayor potencia posible en esa resistencia $R$.




**Solución.**
2 Ω

# MATEMÁTICAS

Estimado estudiante,

Soy **Ángel Fuertes**, profesor de matemáticas en el Grado en Estudios de Arquitectura de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad de Navarra.

Factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, trazar gráficas elementales, aplicar identidades logarítmicas y trigonométricas, trabajar con exponentes y logaritmos y la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, son claves para no tener dificultades en este próximo curso de Matemáticas.

En las páginas siguientes, se les presenta una "prueba" que contiene 32 preguntas ordenadas en 8 bloques referidas a estas cuestiones básicas.

| | Cuestiones |
|---|---|
| 1 Operaciones algebraicas | 1 2 3 4 |
| 2 Geometría analítica | 5 6 7 8 |
| 3 Ecuaciones y sus soluciones | 9 10 11 12 |
| 4 Exponenciales y logaritmos | 13 14 15 16 |
| 5 Funciones y sus propiedades | 17 18 19 20 |
| 6 Desigualdades y valores absolutos | 21 22 23 24 |
| 7 Sistemas de ecuaciones | 25 26 27 28 |
| 8 Trigonometría | 29 30 31 32 |

Es una buena oportunidad para verificar los conocimientos que tiene sobre estos conceptos. Lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las proporcionadas en la última hoja de este texto.

1. *Simplificar* $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x+2}$ | $\dfrac{x+1}{2}$ | $\dfrac{1}{x+1}$ | $\dfrac{x+1}{x+2}$ | $x+1$ |

2. *Simplificar* $\sqrt{a^4-4a^2+4}$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $a^2-2$ | $\lvert a^2-2 \rvert$ | $a^2+2a+2$ | $\lvert a^2+2 \rvert$ | $a^2+2$ |

3. *Simplificar* $\left[-3x^{-2}y^{3}\right]^{-2}$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{6x^4}{y^6}$ | $\dfrac{6y}{x^4}$ | $6xy^4$ | $\dfrac{x^4}{9y^6}$ | $-\dfrac{6x^4}{y^6}$ |

4. *Calcular* $\left[\dfrac{1}{x}+3\right]\left[5+\dfrac{2}{x^2}\right]$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| *todas las demás respuestas son incorrectas* | $\dfrac{11}{x}+15+\dfrac{2}{x^2}$ | $\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x^2}$ | $\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}$ | $\dfrac{5}{x}+15+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^2}$ |

5. *La recta perpendicular a la recta que pasa por los puntos (1,1) y (2,2) tiene pendiente:*

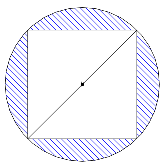
| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | -1 | -2 | 1 |

6. *Un triángulo tiene un lado de longitud 3, otro de longitud 4 y otro de longitud* x. *Los posibles valores de* x *son:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $x=5$ | $x>7$ | $0<x<5$ | $1<x<7$ | $0<x$ |

7. *Si la diagonal del cuadrado vale 6, el área rayada es:*

| a. | b. | c. |
|---|---|---|
| $36\pi$ | $9\pi-18$ | $36$ |
| **d.** | **e.** | |
| $36\pi-36$ | $9\pi-9$ | |



8. *La circunferencia de ecuaciones* $x^2+y^2-2y=0$ *corta a la recta* $y=mx$ *en dos puntos distintos*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| si y solo si $m \neq 0$ | si y solo si $m > 0$ | para todos los valores de $m$ | para ningún valor de $m$ | si y solo si $m < 0$ |

9. *Si* $2(2x-3)+5(x+1)=6x-7$, *entonces:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $x=4$ | $x=-2$ | $x=-4$ | $x=2$ | $x=8$ |

10. *Si* $x=3$, *el valor más pequeño de* y *que satisface* $xy^2+3x^2y+54=0$ *es:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $-6$ | $-3$ | 0 | 3 | ninguno de los anteriores |

11. *La raíz mayor de la ecuación* $x^3+4x^2+3x=0$, *es:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $x=-2$ | $x=-1$ | $x=0$ | $x=1$ | $x=-3$ |

12. *Las raíces reales de la ecuación* $x^2+3x+8=0$ *son:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| *ninguna* | *dos raíces reales* | *no se puede determinar* | *una raíz real* | *tres raíces reales* |

13. *Si* $f(x)=2^{-x}$, *entonces* $f(4)=$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 16 | $-1/16$ | $1/16$ | 8 | $-16$ |

14. $\log(x)<\log(x+1)$ *es equivalente a:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $0<x$ | $x<0$ | $1<x$ | $x<1$ | $x<x+1$ |

15. $\log_3(3^5)$ *es:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 1/3 | 3e | e | 1/5 | 5 |

16. *¿Cuál de los siguientes valores de* x *satisface la ecuación* $\log_2(3x)+\log_2(2x)=3$ *?*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $x=\frac{3}{5}$ | $x=5$ | $x=4$ | $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$ |

17. *Si* $f(x)=-5x-2$, *entonces* $f(0)$ *:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 23 | 0 | 22 | -5 |

18. *Si* $h(x)=x^2$, $g(x)=x+1$ *y* $f(x)=x+3$, *entonces* $h\left[g\left[f(0)\right]\right]=$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 9 | 1 | 16 |

19. *Si* $h(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ *y* $f(x)=x+1$, *entonces* $h\left[g\left[f(0)\right]\right]+f\left[g\left[h(0)\right]\right]=$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 16 | 0 | 4 | 9 |

20. *Si* $f(x)=3x^2+3$, *entonces* $f\left[f(a)\right]=$

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 0 | todas las otras respuestas son incorrectas | $3(3a^2+3)^2+3$ | No está definido | $3a^2+3$ |

21. *Si* $a=-3$, $b=5$ *y* $c=-1$; $\vert a-b\vert-(c-a)$ *es igual a:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | -2 | 11 | 10 |

22. *La desigualdad* $(x-1)^2>1$ *es equivalente a:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $x<0$ | $0<x$ y $x<2$ | $x<0$ ó $x>2$ | $x>2$ | $x<-2$ |

23. *Los valores de* x *que satisfacen la inecuación* $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$ *son:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* todas los números reales | *b.* $-1 < x < 1$ | *c.* no hay ningún valor de $x$ que satisfaga la inecuación | *d.* $x \neq 0$ | *e.* todas las demás respuestas son incorrectas |

24. *La desigualdad* $\frac{x^3}{-4x^2+3x-5} > 0$ *es equivalente a:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* $x = 0$ | *b.* $x \neq 0$ | *c.* $x < 0$ | *d.* $x > 0$ | *e.* Ninguna de las anteriores |

25. *Si* $3x + 4y = 7$ *y* $5x - 4y = 1$, *entonces* $xy$ *es:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* 1 | *b.* 2 | *c.* indeterminado | *d.* 4 | *e.* 3 |

26. *Si* $x - y = 4$ *y* $4x - y = 1$ *entonces* $3xy$ *:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* indeterminado | *b.* 12 | *c.* 6 | *d.* 15 | *e.* 9 |

27. *Si* $5x - 6y = 4$ *y* $3x + 4y = 10$ *entonces* $\frac{x}{y}$ *es:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* 1 | *b.* indeterminado | *c.* 0 | *d.* 2 | *e.* 3 |

28. *Si* $y + 3x + 2 = 0$ *y* $y = x^2$, *entonces hay una solución con* x *dada por:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* $x = -1$ | *b.* indeterminado | *c.* $x = 0$ | *d.* $x = 2$ | *e.* $x = 1$ |

29. *Un triángulo rectángulo tiene de lados 3, 4 y 5. El coseno del ángulo más pequeño es:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a.* 3/5 | *b.* 4/5 | *c.* 4/3 | *d.* 3/4 | *e.* 5/3 |

30. *La medida en radianes de un ángulo de 45 grados es:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | $\pi/3$ | $2\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi/4$ |

31. *Si* $\sin(a+b)=1$ *y* $\tan(a)=0$, *entonces* $\tan(b)$ *es*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1 | 0 | indefinido | 1/4 |

32. *Si* $\sin(a+b)=1$ *y* $\cos(a)=0$, *entonces* $\cos(2b)$ *es:*

| a. | b. | c. | d. | e. |
|---|---|---|---|---|
| 2 | indeterminado | 1 | 1/2 | 0 |

| | | 1–4 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Operaciones algebraicas | 1 d | 2 b | 3 d | 4 e | |
| 2. | Geometría analítica | 5 c | 6 d | 7 b | 8 a | |
| 3. | Ecuaciones y sus soluciones | 9 b | 10 a | 11 c | 12 a | |
| 4. | Exponenciales y logaritmos | 13 c | 14 a | 15 e | 16 e | |
| 5. | Funciones y sus propiedades | 17 d | 18 e | 19 a | 20 c | |
| 6. | Desigualdades y valores absolutos | 21 a | 22 c | 23 d | 24 c | |
| 7. | Sistemas de ecuaciones | 25 a | 26 d | 27 d | 28 a | |
| 8. | Trigonometría | 29 b | 30 e | 31 d | 32 c | |

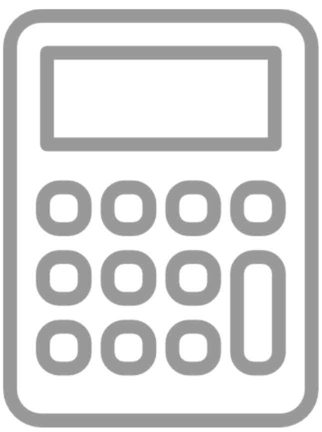
Seguidamente encontrará material para seguir repasando más conceptos de matemáticas. Se han seleccionado los siguientes capítulos:

· Conjuntos
· Números reales
· Desigualdad y valor absoluto
· Expresiones algebraicas
· Polinomios
· Factorización polinomios
· Ecuación cuadrática
· Fracciones racionales
· Trigonometría

En cada uno de ellos se presentan brevemente los conceptos, abundantes notas, ejemplos, ejercicios resueltos y una colección de ejercicios propuestos con los que finaliza cada tema.

Aprender matemáticas requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad y un lápiz y papel en mano para abrirse camino.

Les deseamos paciencia, constancia y la mejor de las suertes para esta nueva etapa que comenzará en unos meses.



# Aa Cuestiones básicas Matemáticas

# Aa.1 Conjuntos

## Conjuntos

### Definición y notación

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman **elementos**. Designamos cada elemento de un conjunto con una letra minúscula. Los conjuntos se designan con letras mayúsculas.

### Determinación de conjuntos

Un conjunto está bien determinado cuando dado un elemento cualquiera *x* es cierta una y sólo una de las proposiciones siguientes:

- *x* pertenece al conjunto *A* $\quad x \in A$
- *x* no pertenece al conjunto *A* $\quad x \notin A$

La proposición "todos los alumnos que aprobarán el fin de carrera en junio" no define un conjunto, no podemos afirmar de un alumno si aprobará o no en junio. Solemos determinar los conjuntos de dos maneras:

**por extensión**

Cuando se nombran explícitamente todos los elementos del conjunto. Los representamos entre corchetes.

- $\{a\}$ conjunto que consta solamente del elemento *a.*
- $\{a,b,c\}$ conjunto que consta del elemento *a*, *b* y *c.*

También usamos corchetes para conjuntos infinitos

- $\{1,2,3,4,\cdots\}$ conjunto de los números naturales.

**por comprensión**

Cuando todos los elementos del conjunto *A*, y solamente ellos verifican una propiedad, esta propiedad se llama *propiedad característica* de *A*.

- $\{x/P\}$ conjunto de todos los *x* para los que se cumple la propiedad *P.*
- $\{x/x>2\}$ conjunto de todos los números mayores que 2.

### Representación de un conjunto

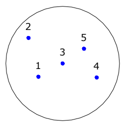
Las dos formas mas usadas para representar un conjunto son:

***Diagrama lineal***

Señalamos sobre una recta con un punto cada uno de los elementos del conjunto. Así $A=\{1,2,3,4,5\}$.

***Diagrama de Venn o de Euler***

Representamos los conjuntos por una región del plano limitada por una curva cualquiera cerrada y simple, un círculo, una elipse, un cuadrado, etc.




*A*

### 1. **Igualdad** de conjuntos

Dos conjuntos *A* y *B* son **iguales** cuando constan de los mismos elementos.

*A* es igual a *B*, y se escribe *A* = *B,* cuando todo elemento de *A* es un elemento de *B* y todo elemento de *B* es un elemento de *A*.

$$A=B \;\Leftrightarrow\; (\forall x)\;(x\in A \Leftrightarrow x \in B)$$

| ***Propiedades de la igualdad de conjuntos*** | |
|---|---|
| *Reflexiva* | $A=A$ |
| *Simétrica* | Si $A=B$ implica $B=A$ |
| *Transitiva* | Si $A=B$ y $B=C$ implica $A=C$ |

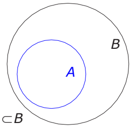
| ***Algunos conjuntos*** | | | |
|---|---|---|---|
| *Conjunto unitario*<br>*Conjunto con un único elemento* | $A=\{x\}$ | *Conjunto binario*<br>*Conjunto con dos elementos* | $A=\{x,y\}$ |
| *Conjunto universal*<br>*Conjunto de todos los elementos. Se designa con la letra U* | $U=\{\forall x,\ x=x\}$ | *Conjunto vacío*<br>*Conjunto que no tiene elementos. Se designa con ∅.* | $\varnothing=\{\forall x,\ x\neq x\}$ |

## 2. **Inclusión** de conjuntos

Sean dos conjuntos *A* y *B*, decimos que *A* está **incluido** en *B* y representamos

$$A \subset B$$

sí y sólo si todo elemento de *A* también es un elemento de *B*.



$A \subset B$

### Definición de **subconjunto**

*A* es un **subconjunto** de *B* si *A* está incluido en *B*.

| ***Propiedades de la inclusión de conjuntos*** | |
|---|---|
| *Reflexiva* | Para todo *A* se cumple $A \subset A$ |
| *Antisimétrica* | Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$ |
| *Transitiva* | Si $A \subset B$ y $B \subset C$ implica $A \subset C$ |
| | Para todo *A* se cumple $\varnothing \subset A$ y $A \subset U$ |

## 3. **Complementario** de un conjunto

El complementario de un conjunto *A*, que se designa por $\complement A$, es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a *A*.

$$\complement A = \{x \,/\, x \notin A\}$$

### Conjunto de las **partes de *A***

Es el conjunto de todos los subconjuntos de *A*. Se escribe $\mathscr{P}(A)$ y se le llama también **potencia de *A***. Si $A = \{a, b, c\}$ por ejemplo, entonces

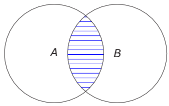
$$\mathscr{P}(A) = [\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}]$$

En general, si *A* tiene *n* elementos, el número de elementos de $\mathscr{P}(A)$ será $2^n$.

# □ **O**peraciones entre conjuntos

## 1. **Intersección** de dos conjuntos

$A \cap B$




Es el conjunto de los elementos comunes a dos conjuntos *A* y *B*, lo representamos

$$A \cap B = \{x / \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

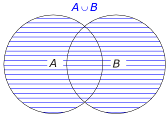
### Conjuntos **disjuntos**

Dos conjuntos *A* y *B* son ***disjuntos*** si no tienen ningún elemento común.

$$A \cap B = \varnothing$$

## 2. **Unión** de conjuntos

$A \cup B$

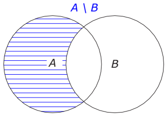



Es el conjunto de todos los elementos que están en *A* o en *B*, lo representamos

$$A \cup B = \{x / \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

## 3. **Diferencia** de conjuntos

$A \setminus B$




La diferencia de *A* y *B* es el conjunto de los elementos que perteneciendo a *A* no pertenecen a *B*.

$$A \setminus B = \{x / \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

El conjunto complementario se puede expresar como $\complement A = U \setminus A$

La diferencia de conjuntos se puede definir por medio de la intersección y de la complementación,

$$A \setminus B = A \cap \complement B$$

### Cardinal de *A*

Es el número de elementos de *A*. Se representa card *A*.

El **cardinal de la unión** de dos conjuntos [card $(A \cup B)$], es igual al cardinal del primer conjunto [card $(A)$] mas el cardinal del segundo conjunto [card $(B)$] menos la diferencia entre el cardinal del primer conjunto y el cardinal del segundo conjunto [card $(A \cap B)$].

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } (A) + \text{card } (B) - [\text{card } (A \cap B)]$$

## Ejemplo 1 ■ Conjuntos y subconjuntos

1. El conjunto de los triángulos equiláteros está incluido en el conjunto de todos los triángulos. Es un subconjunto de él.

2. El conjunto de los números racionales está incluido en el conjunto de los números reales. Es, por lo tanto, un subconjunto de los números reales.

3. Para designar ciertos conjuntos se han generalizado las siguientes letras mayúsculas:

- $\mathbf{N} = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 777,\ \ldots\}$ *Conjunto de los números* ***naturales***
- $\mathbf{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ *Conjunto de los números* ***enteros***
- $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in Z \wedge b \neq 0\right\}$ *Conjunto de los números* ***racionales***
- $\mathbf{R} = \{\text{racionales e irracionales}\}$ *Conjunto de los números* ***reales***
- $\mathbf{C} = \{a + bi / a, b \in R\}$ *Conjunto de los números* ***complejos***

---

## Ejemplo 2 ■ Unión e intersección de conjuntos

1. Si $A = \{x \in R / x < 2\}$ y $B = \{x \in R / x > 1\}$ entonces

$$A \cap B = \{x \in R / 1 < x < 2\}$$

2. Si $A$ es el conjunto de todos los múltiplos de 3 y $B$ es el conjunto de todos los múltiplos de 5, $A \cap B$ es el conjunto de todos los múltiplos de 15.

3. Si $A = \{x \in R / x < 0\}$ y $B = \{x \in R / x > 0\}$ entonces la unión e intersección serán

$$A \cup B = R^* \qquad A \cap B = \varnothing$$

La exclusión del cero de los conjuntos se suele indicar con un asterisco.

4. Si $A$ es el de los números racionales y $B$ es el conjunto de de los números irracionales, $A \cup B$ es el conjunto de los números reales y $A \cap B$ es el conjunto vacío.

---

## Ejemplo 3 ■ Cardinal de un conjunto

Si el 80% de los navarros ve la televisión y el 40% escucha la radio, ¿Cuál es el máximo porcentaje de navarros que no ven la televisión ni escuchan la radio?

***Solución***

La única forma lógica para que el problema tenga sentido es que haya gente que vea la televisión y oiga la radio.

$\text{card } (A) = 80$ **(televisión)** $\qquad \text{card } (B) = 40$ **(radio)**

$\text{card } (A \cap B) \leq 40$ **(televisión y radio)**

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } (A) + \text{card } (B) - [\text{card } (A \cap B)] = 80 + 40 - 100 = 20$$

En este caso, si todos los que oyen la radio ven la tele, el *20% sería el máximo* posible de navarros que ni ven televisión ni escuchan la radio.

---

## Ejemplo 4 ■ Cardinal de un conjunto

En una reunión hay 15 personas que saben jugar al ajedrez, 25 al mus y 10 a ambos juegos. Si todos los asistentes saben jugar, al menos, a uno de los juegos. ¿Cuántas personas hay en total?

***Solución***

$\text{card } (A) = 15$ **(ajedrez)** $\qquad \text{card } (B) = 25$ **(mus)**

$\text{card } (A \cap B) = 10$ **(ajedrez y mus)**

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } (A) + \text{card } (B) - [\text{card } (A \cap B)] = 15 + 25 - 10 = 30$$

---

| **Propiedades de la unión e intersección** | |
|---|---|
| *Primeras propiedades de la unión* <br> $A \subset (A \cup B)$ y $B \subset (A \cup B)$ <br> Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ <br> $A \subset C$ y $B \subset C$ entonces $(A \cup B) \subset C$ | *Primeras propiedades de la intersección* <br> $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$ <br> Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$ <br> $A \subset C$ y $B \subset C$ entonces $(A \cap B) \subset C$ |
| *Idempotente de la unión* <br> $A \cup A = A$ | *Idempotente de la intersección* <br> $A \cap A = A$ |
| *Asociativa de la unión* <br> $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | *Asociativa de la intersección* <br> $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| *Distributiva de la unión* <br> $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | *Distributiva de la intersección* <br> $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| *Simplificativa de la unión* <br> $A \cup (A \cap B) = A$ | *Simplificativa de la intersección* <br> $A \cap (A \cup B) = A$ |
| *Conmutativa de la unión* <br> $A \cup B = B \cup A$ | *Conmutativa de la intersección* <br> $A \cap B = B \cap A$ |
| *Identidad de la unión* <br> $A \cup \varnothing = A,\ A \cup U = U$ | *Identidad de la intersección* <br> $A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap U = A$ |
| *Complementación de la unión* <br> $A \cup \complement A = U$ | *Complementación de la intersección* <br> $A \cap \complement A = \varnothing$ |
| *Ley de Morgan de la unión* <br> $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ | *Ley de Morgan de la intersección* <br> $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ |

*Estas leyes se comprueban fácilmente mediante los diagramas de Venn y pueden demostrarse por diferentes métodos.*

**Ejemplo 5** — Demostración por doble inclusión

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

***Solución***

$$\forall x \in [A \setminus (B \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin (B \cup C) \end{cases} \Rightarrow x \in A \ \ y \ \begin{cases} x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \in A \setminus C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)] \Rightarrow [A \setminus (B \cup C)] \subset [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)] \qquad \textbf{(I)}$$

$$\forall x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \in A \setminus C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \ \ y \ \ x \notin B \\ x \in A \ \ y \ \ x \notin C \end{cases} \Rightarrow x \in A \ \ y \ \begin{cases} x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [A \setminus (B \cup C)] \Rightarrow [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)] \subset [A \setminus (B \cup C)] \qquad \textbf{(II)}$$

y de **(I)** y **(II)** $\qquad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

## Productos cartesianos

### Par ordenado

Es un conjunto de dos elementos dados en un cierto orden. Los pares se caracterizan por la siguientes propiedades:

| |
|---|
| Si $(a,b) = (c,d)$ entonces $a = c$ y $b = d$ |
| Si $(a,b) \neq (c,d)$ entonces $a \neq c$ o $b \neq d$ |
| Si $(a,b)$ es un par, $a$ es la ***primera componente*** del par y $b$ la ***segunda componente*** del par |

### Definición de **producto cartesiano**

El producto cartesiano de dos conjuntos no vacíos $A$ y $B$, que representamos por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados $(a,b)$ con $a \in A$ y $b \in B$, es decir

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A,\ b \in B\}$$

En general

$$A \times B \times C \times \cdots = \{(a,b,c,\ldots) / a \in A,\ b \in B,\ c \in C,\ldots\}$$

| **Propiedades** | |
|---|---|
| $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ | $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ |
| $A\subset \complement A$ y $B\subset \complement B$ entonces $A\times B\subset \complement A\times \complement B$ | |
| $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ | $A\times B=\varnothing$ es equivalente a $A=\varnothing$ o $B=\varnothing$ |
| $A\times B\neq B\times A$ | $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$ |

### Representación del producto cartesiano

La representación del conjunto $A\times B$ se hace por medio del diagrama de coordenadas cartesianas. Tomamos dos rectas *OX* (eje de abscisas) y *OY* (eje de ordenadas) de origen *O*, perpendiculares u oblícuas; los conjuntos *A* y *B* se representan linealmente en OX e OY respectivamente. Los elementos (*a*,*b*) *de* $A\times B$ tienen por representación puntos del plano que se obtienen como intersección de la paralela a *OY* por a con la paralela a *OX* por *b*.

**Ejemplo 6** Producto cartesiano

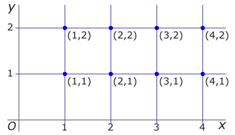
Si $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{1,2\}$, entonces

$A\times B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

que hemos representado (figura de la derecha); además,

$A\times B\neq B\times A$ ya que

$B\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$




---

## Aplicaciones

Si *A* y *B* son dos conjuntos no vacíos, decimos que *f* es una **aplicación** o **función** de *A* en *B*, si a todo elemento del conjunto A le corresponde por *f*, uno y solamente un elemento del conjunto *B*.

$$A \xrightarrow{f} B$$
$$\forall x\in A \xrightarrow{f} \exists y\in B \,/\, y=f(x)$$

Los conjuntos *A* y *B* se llaman respectivamente conjunto **origen** o conjunto de definición, y conjunto **imagen** o imagen de la aplicación.

### Tipos de aplicaciones

***a.*** Aplicaciones **inyectivas**

Es aquella aplicación de *A* en *B* en la que a elementos distintos de *A* le corresponden elementos distintos de *A*. También, cuando se verifica cualquiera de estas dos condiciones:

- $\forall x,x'\in A,\ f(x)=f(y)$ implica $x=y$
- $\forall x,x'\in A,\ x\neq y$ implica. $f(x)\neq f(y)$

***b.*** Aplicaciones **sobreyectivas**

Es aquella en la que la totalidad de los elementos de *B* son imagen de, al menos, un elemento de *A*. También, cuando el conjunto imagen es *B*.

***c.*** Aplicaciones **biyectivas**

Cuando son a la vez sobreyectivas e inyectivas. Se cumple por lo tanto, que a cada elemento de *A* le corresponde un solo elemento de *B* y solamente uno, y a cada elemento de *B* le corresponde uno y sólo uno de *A*.

### Funciones

Empleamos la palabra función como sinónimo de aplicación, sobre todo cuando los conjuntos *A* y *B* son numéricos. Así, hablamos de funciones reales de variable real, funciones complejas de variable compleja, etc. Función y aplicación designan la misma correspondencia.

### Aplicaciones compuestas

Sea *f* una aplicación que hace corresponder a cada elemento $x\in A$ un elemento $y\in B$ Sea *g* otra aplicación que hace corresponder a cada elemento $y\in B$ un elemento $z\in C$. La aplicación *F* que hace corresponder a cada elemento $x\in A$ un elemento $z\in C$ se denomina aplicación compuesta y se representa $F=g\circ f$

| *aplicación de A en B* | *aplicación de B en C* | *aplicación compuesta de A en C* |
|---|---|---|
| $A\xrightarrow{f} B$ <br> $x\xrightarrow{f} y=f(x)$ | $B\xrightarrow{g} C$ <br> $y\xrightarrow{g} z=g(y)$ | $A\xrightarrow{g\circ f} C$ <br> $x\xrightarrow{g\circ f} z=(g\circ f)(x)=g[f(x)]$ |

La composición de aplicaciones es asociativa, ya que si dadas tres aplicaciones *f*, *g* y *h* entre tres conjuntos, se verifica:

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

# Aa.1e Ejercicios

**1.** Definir por extensión el conjunto $S$ de los números naturales primos mayores que 1 y menores que 100. ¿Cuál es su cardinal?

**2.** Describir por extensión los siguientes conjuntos:

*a.* $A=\{n \text{ natural}/15\leq 3n<30\}$ *b.* $A=\{n \text{ natural}/7<n+5<12\}$

**3.** Para los conjuntos:

$$A=\{0,2\} \quad B=\{-1,0,1\} \quad C=\{1,2,3,4\} \quad D=\{2,4,6,8,\ldots\}$$

Determinar:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a.* | $A\cup B$ | *b.* | $A\cup C$ | *c.* | $A\cup D$ | *d.* | $B\cup C$ |
| *e.* | $B\cup D$ | *f.* | $C\cup D$ | *g.* | $A\cap B$ | *h.* | $A\cap C$ |
| *i.* | $A\cap D$ | *j.* | $B\cap C$ | *k.* | $B\cap D$ | *l.* | $C\cap D$ |
| *m.* | $A\times B$ | *n.* | $A\times C$ | *o.* | $B\times C$ | *p.* | $A\times A\times B$ |
| *q.* | $A\times B\times A$ | *r.* | $A\cap(C\cap D)$ | *s.* | $A\cap(B\cup C)$ | *t.* | $A\cup(C\cap D)$ |
| *u.* | $A\cup(B\cap C)$ | *v.* | $A\backslash B$ | *w.* | $C\backslash D$ | *x.* | $(A\backslash B)\backslash(C\backslash D)$ |

**4.** Para los conjuntos:

$$A=\{x\in\mathbf{R}/x>2\} \quad B=\{x\in\mathbf{R}/x\leq 4\} \quad C=\{x\in\mathbf{R}/x>3\}$$

Determinar:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a.* | $A\cup B$ | *b.* | $A\cup C$ | *c.* | $B\cup C$ | *d.* | $A\cap B$ |
| *e.* | $B\cup D$ | *f.* | $B\cap C$ | *g.* | $A\backslash B$ | *h.* | $B\backslash C$ |

**5.** Probar por doble inclusión las relaciones:

$$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$$

**6.** Demostrar que

$$A\cup(B\backslash C)=(A\cup B)\backslash(A\cup C)$$

**7.** Usando la relación $A\cap\complement B=A\setminus B$ demostrar que:

$$(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

**8.** Aplicando las propiedades entre conjuntos simplificar las siguientes expresiones:

*a.* $[\complement A\cap B]\cap\complement[\complement A\cup B]$ *b.* $[(A\cap B)\cap C]\cup[(A\cap B)\cap\complement C]$

*c.* $\complement[(A\cap\complement(B\cap C)]\cup\complement[(\complement A\cup\complement B)\cup C]$ *d.* $[(A\cap B)\cap C]\cup[(A\cap B)\cap\complement C]\cup(\complement A\cap B)$

**9.** Determinar el conjunto complementario del conjunto

$$(A\cup B\cup\complement C)\cap(A\cup\complement B\cup\complement C)$$

**10.** En una escuela internacional de 1 000 alumnos, 560 hablan inglés, 440 francés y 220 alemán. Se sabe además que 260 hablan inglés y francés, 100 inglés y alemán, 90 francés y alemán y 10 hablan los tres idiomas. ¿Cuántos alumnos no hablan ninguno de los tres idiomas? ¿Cuántos alumnos hablan únicamente inglés?

afuertes@unav.es

# Aa.2 Números reales

## Introducción al número real

### Conjunto de los números **naturales**

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Se supone conocido de forma intuitiva como aquel cuyos elementos sirven para contar "objetos". Con ellos se establecen las relaciones de igualdad, mayor o menor, y las operaciones fundamentales (operaciones internas) *suma ó* **adición** (+) y *producto ó* **multiplicación** (•), estas operaciones son *cerradas*, es decir, el resultado es siempre un número natural y poseen un conjunto de propiedades que se expresan, $\forall a, b, c \in N$, por las relaciones siguientes:

La suma cumple las propiedades: asociativa, conmutativa; el producto cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, distributiva respecto de la suma y tiene elemento neutro.

**Principio de inducción completa**

*Si una propiedad de los números naturales se verifica para un cierto número natural **n**, y si admitiendo que se verifica para un número natural cualquiera posterior a **n** se verifica también para el siguiente, entonces dicha propiedad se verifica para todos los números naturales posteriores a **n**.*

Los números naturales son un conjunto numerable totalmente ordenado.

**Ejemplo 1** — Suma de los *n* primeros naturales

Probar por inducción que la suma de los $n$ primeros números naturales impares es $n^2$. Es decir que:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

***Solución***

Para $n = 1$ la igualdad es evidente, para $n = 2$ también. Supongamos que es cierta hasta $n - 1$, es decir que se cumple: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3) = (n - 1)^2$. Luego esto implica la igualdad para $n$, ya que:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) &= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 3)] + (2n - 1) \\ &= (n - 1)^2 + (2n - 1) \\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 \end{aligned}$$

Con lo que la igualdad queda probada.

---

### Conjunto de los números **enteros**

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Los suponemos también definidos de forma intuitiva para avanzar en la insuficiencia de los números naturales. El conjunto **Z** con las dos operaciones internas, suma (+) y producto (•), tiene estructura de **anillo conmutativo**, sus propiedades son $\forall a, b, c \in Z$:

La suma cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y cada número entero tiene un único elemento opuesto; el producto cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, distributiva respecto de la suma y tiene elemento neutro.

### Conjunto de los números **racionales**

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Construido como el cociente de números enteros, excluido el 0 del denominador.

El conjunto **Q** tiene estructura de ***cuerpo conmutativo***, significa que en **Q** están definidas dos operaciones internas:

| *Suma de números racionales* | *Producto de números racionales* |
|---|---|
| $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ | $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ |

El *opuesto* del número $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}$ y el *inverso* del número $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

La suma cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y cada número racional tiene un único elemento opuesto; el producto cumple las propiedades: asociativa, conmutativa, distributiva respecto de a suma, tiene elemento neutro y todo racional no nulo tiene elemento simétrico (inverso) respecto al producto.

El conjunto **Q** es ***totalmente ordenado***; se define en **Q** una relación de orden mediante:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

*Entre dos números racionales distintos cualesquiera a y b existen siempre **infinitos** números racionales.*

*El conjunto de los números racionales es numerable.*

### ■ Representación decimal de los números racionales

Todo número racional tiene una representación decimal finita o periódica. Recíprocamente, toda expresión decimal finita o periódica representa un número racional. Así:

$$\frac{1}{5}=0,2 \qquad \frac{1}{6}=0,1666\ldots=0,1\overline{6} \qquad \frac{224}{165}=1,3575757\ldots=1,3\overline{57}$$

En la expresión decimal se distingue la parte no repetida (**anteperiodo**) y la parte repetida (**periodo**), así:

| ***número*** | anteperiodo | periodo |
|---|---|---|
| $0,1666\ldots=0,1\overline{6}$ | 1 | 6 |
| $1,3575757\ldots=1,3\overline{57}$ | 3 | 57 |
| $23,10651651\ldots=23,10\overline{651}$ | 10 | 651 |

Obtenemos la **fracción generatriz**, es decir $\frac{a}{b} \,/\, a,b\in\mathbf{Z}$ , de un número racional en forma decimal finita o periódica…

## Ejemplo 2 ■ Fracción generatriz de un número decimal finito

Obtener la fracción generatriz del número $1,35$ :

***Solución***

Multiplicamos y dividimos para desplazar la coma tantos dígitos como decimales tiene el número,

$$1,35=1,35\cdot\frac{100}{100}=\frac{135}{100}=\frac{27}{20}$$

## Ejemplo 3 ■ Fracción generatriz de un número decimal periódico

Obtener la fracción generatriz del número $1,357\;575\;7\ldots=1,3\overline{57}$ :

***Solución***

Multiplicamos para desplazar la coma hasta abarcar el periodo. También se multiplica para desplazar la coma hasta abarcar el anteperiodo. Por último se restan esas dos cantidades,

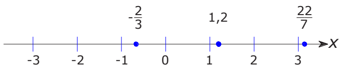
$$\begin{aligned} 1000\,a &= 1\,357,575\,7\ldots && \text{multiplicamos por 1000 para abarcar el periodo}\\ 10\,a &= 13,575\,7\ldots && \text{multiplicamos por 10 para abarcar el anteperiodo}\\ \hline 990\,a &= 1344 && \text{restamos} \end{aligned}$$

luego

$$1,3\overline{57}=\frac{1344}{990}=\frac{224}{165}$$

### ■ Representación gráfica de los números racionales

Al igual que los números naturales y los enteros, los números racionales están ordenados. Podemos representar los números racionales como puntos de una recta. Entre dos números racionales, no importa lo próximos que estén entre sí, siempre hay infinitos números racionales. Como los números racionales son un conjunto numerable (podemos colocarlos todos en una lista de modo que sepamos siempre escribir el siguiente) significa que hay tantos números racionales como números naturales.




### Conjunto de los números **irracionales**

La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, por ejemplo, no se puede medir tomando como unidad uno de los catetos. Entonces los números racionales resultan insuficientes para medir ciertas magnitudes.

Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales**. Definimos los números irracionales como aquellos que no pueden expresarse como cociente de números enteros.

$$\sqrt{2}\approx 1,414\,213\,562 \qquad \pi\approx 3,141\,592\,654 \qquad e\approx 2,718\,281\,828$$

## ☐ Conjunto de los **números reales**

Constituido por los números racionales y los irracionales, los representamos como **R**.

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$$

Las propiedades de los números reales, denominadas **axiomas**, pueden resumirse en la afirmación:

***R es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo***

***a. R es un cuerpo conmutativo***

Consideramos definidas dos operaciones internas: la suma (+) y producto (•), las cuales satisfacen las propiedades siguientes para todo *a*, *b*, y *c* números reales:

| | *Respecto a la suma* | *Respecto al producto* |
|---|---|---|
| ***Clausura*** | $a+b$ es un número real | $a\cdot b$ es un número real |
| ***Asociativa*** | $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ |
| ***Conmutativa*** | $a+b=b+a$ | $a\cdot b=b\cdot a$ |
| ***Distributiva*** | $a(b+c)=ab+ac \qquad (a+b)c=ac+bc$ | |
| ***Elemento neutro*** | $a+0=0+a=a$ | $a\cdot 1=1\cdot a=a$ |
| ***Elemento opuesto/inverso*** | $a+(-a)=0$ | $a\cdot\frac{1}{a}=1 \quad a\neq 0$ |

### ***b.*** ***R es un conjunto totalmente ordenado***

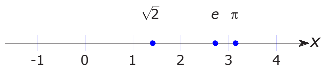
Existe en $R$ una relación de orden, notada $\leq$ y leída "menor o igual que", que satisface

| | | |
|---|---|---|
| ***Reflexiva*** | $\forall a \in R$ se cumple | $a \leq a$ |
| ***Antisimétrica*** | $\forall a, b \in R$ si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces | $a = b$ |
| ***Transitiva*** | $\forall a, b, c \in R$ si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces | $a \leq c$ |
| ***La relación de orden es total*** | $\forall a, b, c \in R$ una de las dos afirmaciones es siempre cierta | $a \leq b$ ó $b \leq a$ |
| ***El orden es compatible con la suma y el producto*** | $\forall a, b, c \in R$ si $a \leq b$ entonces | $a + c \leq b + c$ |
| | $\forall a, b, c \in R$ si $a \leq b$ y $0 \leq c$ entonces | $a \cdot c \leq b \cdot c$ |

La notación $x<y$ ($x$ es menor que $y$) significa que se cumplen dos propiedades $x \leq y$ y $x \neq y$. También se escribe $y \geq x$ ($y$ es mayor o igual que $x$) de forma equivalente a $x \leq y$.

#### ■ **Representación ordenada de los números reales**

Podemos distribuir los números reales sobre una recta, en donde tomaremos como origen el número real 0, y situaremos ordenadamente los números reales positivos a la derecha y los reales negativos a la izquierda.




A todo número real le corresponderá una longitud y en consecuencia un punto de la recta. Recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real. Este tipo de relación se denomina una ***correspondencia biunívoca*** (o ***biyectiva***)

En el sistema de los números reales también son posibles la elevación a potencia y las operaciones inversas (de todo número real positivo se puede extraer raíz de cualquier grado, todo número real positivo tiene logaritmo de cualquier base positiva –a excepción de la unidad-)

## Cotas y extremos de un subconjunto de R

Sea $A$ un conjunto cualquiera de números reales, y en él definida una relación de orden ($\leq$), $\forall a \in A$:

- ***Cota superior*** — $M \in \mathrm{R}$ es una cota superior del conjunto $A$, si $a \leq M$
- ***Cota inferior*** — $m \in \mathrm{R}$ es una cota inferior del conjunto $A$, si $m \leq a$
- $A$ está ***acotado*** si lo está superior e inferiormente, es decir si existen ***m* y *M*** tal $m \leq a \leq M$

  $A$ está ***acotado superiormente*** (***inferiormente***) en **R**, cuando admite al menos una cota superior (inferior) finita.
- ***Extremo inferior*** — Es la **mayor** de las **cotas inferiores** del conjunto $A$
- ***Extremo superior*** — Es la **menor** de las **cotas superiores** del conjunto $A$
- ***Mínimo*** — Se le llama al **extremo inferior** cuando pertenece al conjunto
- ***Máximo*** — Se le llama al **extremo superior** cuando pertenece al conjunto

## Ejemplo 4 ■ Cotas y extremos de un conjunto

1. Los intervalos $(-\infty, 4)$ y $(-\infty, 4]$ están acotados superiormente pero no inferiormente.

   En ambos casos 4 es una cota superior (todos los elementos del conjunto son menores o iguales que 4) pero no existe una cota inferior.
2. El conjunto de los naturales está acotado inferiormente pero no superiormente.

   1 es la cota inferior pero no existe ninguna cota superior.
3. Los intervalos $(-4, 4)$, $[-4, 4]$ y $[-\infty, 4)$ están acotados (superior e inferiormente).
4. El conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,/\, x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots \right\}$$

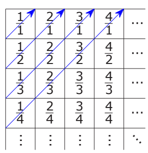
   es acotado, pues lo está superior e inferiormente, siendo $\{x \in \mathbf{R} / x \leq 0\}$ el conjunto de las cotas inferiores y $\{x \in \mathbf{R} / x \geq 1\}$ el conjunto de las cotas superiores.
   Los números reales 0 y 1 son los extremos.
   El extremo superior 1 pertenece al conjunto $A$, por lo tanto **1** es el ***máximo***. Como el extremo inferior 0, no pertenece al conjunto $A$, decimos que el conjunto $A$ no tiene mínimo.

### ***c.*** **R *es completo***

Todo subconjunto no vacío de **R** acotado superiormente tiene extremo superior.

Este axioma precisa la idea intuitiva de que los números reales llenan la recta real. Entre todo par de números reales distintos existen infinitos reales (infinitos racionales e infinitos irracionales).

Aunque hay infinitos racionales e infinitos irracionales el número de irracionales es un infinito "mayor" que el de los racionales. El número de racionales es el mismo que el de enteros (o el de naturales, que también es el mismo), ya que se puede hacer corresponder a cada entero un racional y viceversa (matemáticamente se dice que **Q** es numerable). En el cuadro de la derecha se muestra el conjunto de todas las fracciones $m/n$ con $m$ y $n$ naturales. Según las flechas el conjunto **Q** es infinito numerable




$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \ldots \right\}$$

Los irracionales (y por lo tanto los reales) no se pueden poner en correspondencia con los naturales, luego no son conjuntos numerables.

## Operaciones con números reales

Hay cuatro operaciones básicas en la Aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división.

El resultado de la **adición** de dos números reales es la **suma** de esos números llamados **términos**.

La **sustracción** a un número real de otro se le llama **resta** donde el primer término es el **minuendo**, el segundo el **sustraendo** y el resultado **diferencia**. (También se define como la suma del opuesto del segundo término al primero)

$$7-5=7+(-5)=2 \qquad\qquad 7-(-5)=7+5=12$$

### Ejemplo 5 Sumando y restando números reales

1. $-67+12=-55$

2. $6+(-13)+25=18$

3. $-9,25-2,03=-9,25+(-2,03)=-11,28$

4. $\frac{1}{7}-\frac{2}{7}=\frac{1-2}{7}=-\frac{1}{7}$

5. Para sumar fracciones con distinto denominador se halla el mínimo común múltiplo para escribir las fracciones con el mismo denominador; el numerador nuevo será el resultado de multiplicar el numerador antiguo por el denominador común y dividirlo por el denominador antiguo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}+\frac{5}{12} &= \frac{1(3)}{8(3)}+\frac{5(2)}{12(2)} && \text{el minimo comun multiplo es 24} \\ &= \frac{3}{24}+\frac{10}{24} && \text{las fracciones tienen el mismo denominador} \\ &= \frac{3+10}{24} && \text{se suman los numeradores} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned}$$

---

El resultado de **multiplicar** dos números reales se llama **producto**, y cada uno de los números se le llama **factor** del producto.

El producto de cero y cualquier otro número es cero.

La multiplicación se denota de distintas maneras, el producto de “3 por 5” se puede escribir:

$$3\times 5,\quad 3\cdot 5,\quad 3(5),\quad (3)5,\quad (3)(5)$$

### Ejemplo 6 Multiplicando números reales

1. $(-7)(-11)=77$

2. $6(-13)=-78$

1. Para multiplicar más de dos números reales hallamos el producto de sus valores absolutos. Si hay un número par de factores negativos, el producto es positivo. Si hay un número impar de factores negativos, el producto es negativo. En el ejemplo de debajo hay dos factores negativos, luego el producto es positivo y podemos escribir

$$(3)(-5)(-7)(2)=210$$

2. Para multiplicar dos o más fracciones se multiplican sus numeradores y sus denominadores.

$$\left[\frac{2}{7}\right]\left[\frac{5}{3}\right]=\frac{(2)(5)}{(7)(3)}=\frac{10}{21}$$

---

El **inverso** de un número real distinto de cero está definido como el número por el que hay que multiplicar a ese número para obtener la unidad. En general, el inverso de *a*/*b* es *b*/*a*.

Para **dividir** un número real por otro real distinto de cero, multiplicamos el primero por el inverso del segundo. El resultado de dividir dos números reales se llama **cociente** de esos dos números y se puede escribir como

$$a\div b,\quad a/b,\quad \frac{a}{b}$$

El numerador *a* se llama **dividendo**, y el denominador *b* se llama **divisor**.

### Ejemplo 7 Dividiendo números reales

1. $-30\div 6=-30\left[\frac{1}{6}\right]=-\frac{30}{6}=-5$

2. $\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{5}\left[-\frac{2}{3}\right]=-\frac{2}{5}$

3. $-\frac{3}{7}\div-\frac{5}{3}=-\frac{3}{7}\left[-\frac{3}{5}\right]=\frac{9}{35}$

---

### Potencias de exponente natural y base real

Sea $a$ un número real y $n$ un número natural. Se llama **potencia *n*-ésima de *a*** y se designa por $\boldsymbol{a^n}$, el producto de $n$ factores $a$

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n}$$

$a$ es la **base** y $n$ es el exponente. Cuando se eleva a la primera potencia no se suele escribir el exponente 1. Cuando se eleva a la segunda potencia se suele decir $a$ al **cuadrado** o cuadrado de $a$. Cuando se eleva a la tercera potencia se suele decir $a$ al **cubo** o cubo de $a$.

**Ejemplo 8** ■ Operando expresiones exponenciales

1. $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3)(3)(3)(3) = -81$
3. $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
4. $\left[\frac{2}{5}\right]^3 = \left[\frac{2}{5}\right]\left[\frac{2}{5}\right]\left[\frac{2}{5}\right] = \frac{8}{125}$

---

### Raíces de los números reales

Sean $a$ y $b$ números reales y $n \geq 2$ un número natural. Si

$$a = b^n$$

entonces $b$ es la raíz ***n*-ésima de *a***; $n$ es el **índice** del radical y al número $a$ se le llama **radicando**. Si $n = 2$ se le llama **raíz cuadrada**. Si $n = 3$ es la **raíz cúbica**.

Sabemos que hay números que tienen más de una raíz. Por ejemplo, 2 y -2 son raíces cuartas de 16 porque $16 = 2^4$ y $16 = (-2)^4$. Para evitar ambigüedades, si $a$ es un número real, la raíz ***n*-ésima principal de *a*** se define como la $n$–ésima raíz que tiene el mismo signo que $a$, y se representa $\sqrt[n]{a} = b$ .

**Ejemplo 9** ■ Raíces principales de un número

1. $\sqrt{36} = 6$
2. $\sqrt[3]{8} = 2$
3. $\sqrt{0} = 0$
4. $\sqrt[4]{81} = 3$
5. $\sqrt[3]{-27} = -3$
6. $\sqrt[4]{625} = 5$

---

## □ Orden de las operaciones

Para simplificar expresiones numéricas que contienen más de una operación seguimos el siguiente orden:

1. Efectuamos las operaciones dentro de los símbolos de agrupación. Las mas comunes son los paréntesis (), corchetes [] y las barras de fracción.
2. Simplificamos las expresiones exponenciales.
3. Efectuamos las multiplicaciones y divisiones en el orden en que se encuentran de izquierda a derecha.
4. Finalmente, efectuamos las sumas y las restas en el orden en que se encuentran de izquierda a derecha.

**Ejemplo 10** ■ Orden de las operaciones sin símbolos de agrupación

1. $14 - 2 \cdot 3^2$
2. $5 - 6 - 2$
3. $8 \div 2 \cdot 2$
4. $8 \cdot 2 \div 2$

***Solución***

1. $14 - 2 \cdot 3^2 = 14 - 2 \cdot 9 = 14 - 18 = -4$
2. $5 - 6 - 2 = (5 - 6) - 2 = -1 - 2 = -3$
3. $8 \div 2 \cdot 2 = (8 \div 2) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$
4. $8 \cdot 2 \div 2 = (8 \cdot 2) \div 2 = 16 \div 2 = 8$

---

**Ejemplo 11** ■ Orden de las operaciones con símbolos de agrupación

1. $-3 + 2(-1 + 7)^2$

$$\begin{aligned} -3 + 2(-1+7)^2 &= -3 + 2(6)^2 && \text{sumamos dentro del parentesis} \\ &= -3 + 2(36) && \text{efectuamos la potencia} \\ &= -3 + 72 && \text{multiplicamos} \\ &= 69 && \text{sumamos} \end{aligned}$$

2. $(-3 + 2)(-1 + 7)^2$

$$\begin{aligned} (-3+2)(-1+7)^2 &= (-1)(6)^2 && \text{sumamos dentro del parentesis} \\ &= (-1)(36) && \text{efectuamos la potencia} \\ &= -36 && \text{multiplicamos} \end{aligned}$$

---

# Aa.2e Ejercicios

**1.** Determinar si los siguientes números reales son racionales o irracionales.

*a.* $0,3$ *b.* $-73$ *c.* $\frac{3e}{2}$

*d.* $4,4\overline{43}$ *e.* $\left[\sqrt{2}\right]^3$ *f.* $\sqrt[3]{64}$

**2.** Determinar la fracción generatriz de los siguientes números:

*a.* $0,\overline{57}$ *b.* $0,5\overline{97}$ *c.* $3,\overline{9}$

*d.* $0,\overline{9900}$ *e.* $0,\overline{123}$ *f.* $1,2\overline{3}$

**3.** Calcular las cotas superiores e inferiores, extremo superior e inferior, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

*a.* $Z$ *b.* $\{x \in R / x^2 + x + 1 \geq 0\}$ *c.* $\{x \in R / x^2 + x - 1 < 0\}$

*d.* $\{r \in Q / 2r^3 - 1 < 15\}$ *e.* $\{r \in Q / 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$ *f.* $\left\{1 - \frac{1}{n} / n \in N\right\}$

**4.** Efectuar las siguientes operaciones:

*a.* $(0,02)\cdot(1,25)$ *b.* $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ *c.* $2^3 + 2^{-3}$

*d.* $3^0$ *e.* $(16+9)^{-\frac{1}{2}}$ *f.* $3\left[\frac{5}{12} + \frac{3}{8}\right]$

**5.** Efectuar las siguientes operaciones:

*a.* $8^{-\frac{1}{3}}$ *b.* $8^{-\frac{1}{3}} . 3^0$ *c.* $-1^4$

*d.* $(-1)^4$ *e.* $\sqrt{9^9}$ *f.* $\left[5 + \frac{3}{4}\right]\left[2 + \frac{1}{8}\right]$

**6.** Efectuar las siguientes operaciones:

*a.* $\left[5 + \frac{3}{4}\right] \div \left[2 + \frac{1}{8}\right]$ *b.* $\left[5 - \frac{3}{4}\right] \div \left[2 - \frac{1}{8}\right]$ *c.* $3 \div \left[\frac{5}{12} + \frac{3}{8}\right]$

**7.** Efectuar las siguientes operaciones:

*a.* $16 - 5 + 7 - 8$ *b.* $11 - 2 - 9$ *c.* $24 + 2^3 - 8$

*d.* $2 + [8 - (14 \div 2)]$ *e.* $2 + [8 - (14 + 2)]$ *f.* $2 - [8 - (14 + 2)]$

# Aa.3 Desigualdades y valor absoluto

## ☐ Desigualdades

Una desigualdad es una proposición con una de las siguientes formas ($a$ y $b$ son ciertas cantidades o expresiones)

| | | |
|---|---|---|
| $<$ | $a<b$ | $a$ es menor (estrictamente) que $b$ |
| $\leq$ | $a \leq b$ | $a$ es menor o igual que $b$ |
| $>$ | $a>b$ | $a$ es mayor (estrictamente) que $b$ |
| $\geq$ | $a \geq b$ | $a$ es mayor o igual que $b$ |

***Leyes de la desigualdad***

Si $a$, $b$ y $c$ son números reales, entonces:

1 *Ley de tricotomía:* *una sola de las siguientes afirmaciones es verdadera*

$a<b$ ó $a=b$ ó $a>b$

2 *Ley transitiva de la monotonía*

Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$

3 *Ley de monotonía de la adición*

Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$ Si $a<b$, entonces $a-c<b-c$

4 *Ley de monotonía de la multiplicación*

Si $a<b$ y $c>0$ entonces $ac<bc$ Si $a<b$ y $c<0$ entonces $ac>bc$

Al multiplicar una igualdad por un número positivo se conserva el signo de la desigualdad; cuando se multiplica por un número negativo el sentido de la desigualdad cambia. Caso especial $a<b \Rightarrow -a>-b$

5 $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$ $a<0 \Rightarrow \frac{1}{a}<0$

tomar recíprocos invierte el sentido de la desigualdad cuando los números son del mismo signo.

6 $a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

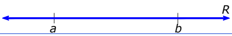
*además* $a^2 \geq 0$ y si $a \neq 0$ entonces $a^2>0$ Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$

## ☐ Intervalos

Si $a, b, \in \mathbf{R}$ y $a \leq b$, se llama:

- **Intervalo abierto $(a,b)$** de extremo inferior ***a*** y extremo superior ***b*** al conjunto de todos los puntos de la recta real comprendidos entre $a$ y $b$, sin contar $a$ ni $b$.
- **Intervalo cerrado $[a,b]$** es el intervalo abierto $(a,b)$ que contiene a los extremos $a$ y $b$.

Los nueve tipos básicos de intervalos de la recta real son:

| | *notación* | *Descripción* | *Tipo* | *Representación* |
|---|---|---|---|---|
| **Finitos:** | $(a,b)$ | $\{x \in \mathbf{R} / a<x<b\}$ | *abierto* |   |
| | $[a,b]$ | $\{x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b\}$ | *cerrado* |   |
| | $[a,b)$ | $\{x \in \mathbf{R} / a \leq x<b\}$ | *semiabierto por la derecha* |   |
| | $(a,b]$ | $\{x \in \mathbf{R} / a<x \leq b\}$ | *semiabierto por la izquierda* |   |
| **Infinitos:** | $(a,\infty)$ | $\{x \in \mathbf{R} / x>a\}$ | *abierto* |   |
| | $[a,\infty)$ | $\{x \in \mathbf{R} / x \geq a\}$ | *cerrado* |   |
| | $(-\infty,b)$ | $\{x \in \mathbf{R} / x<b\}$ | *abierto* |   |
| | $(-\infty,b]$ | $\{x \in \mathbf{R} / x \leq b\}$ | *cerrado* |   |
| | $(-\infty,\infty)$ | $\{x / x \in \mathbf{R}\}$ | *ambos abiertos y cerrados* |   |

Los cuatro primeros son intervalos acotados, y los cinco restantes, intervalos no acotados. Los intervalos no acotados también se clasifican en abiertos y cerrados. Los intervalos $(-\infty,b)$ y $(a,\infty)$ son abiertos, los intervalos $(-\infty,b]$ y $[a,\infty)$ son cerrados y el intervalo $(-\infty,\infty)$ se considera simultáneamente abierto y cerrado.

En la notación, utilizamos el corchete para indicar la inclusión de un extremo, en caso contrario un paréntesis. Los símbolos $\infty$ y $-\infty$ se refieren al infinito positivo y negativo, no representan números reales, simplemente nos permiten describir conjuntos no acotados de manera más concisa.

## Resolución de desigualdades

En una desigualdad en la que aparece una variable real $x$, se puede plantear el problema de determinar explícitamente las soluciones, esto es, los valores de $x$ que satisfacen la desigualdad. Con frecuencia, el conjunto de soluciones, o conjunto solución, está constituido por un intervalo o una unión de intervalos.

Resolver una desigualdad en $x$ es hallar todos los números reales para los cuales la desigualdad se verifica. Utilizamos las propiedades de orden.

### Ejemplo 1 ■ Resolviendo una desigualdad

Hallar todos los números $x$ tal que

$$-3(2-x)<9$$

***Solución***

$$\begin{array}{rll}
-3(2-x) < 9 & & \text{desigualdad original} \\
\frac{1}{3}[-3(2-x)] < \frac{1}{3}9 & & \text{multiplicamos por } \tfrac{1}{3} \text{ a ambos lados} \\
-2+x < 3 & & \text{simplificamos} \\
-2+x+2 < 3+2 & & \text{sumamos 2 a ambos lados} \\
x < 5 & & \text{simplificamos}
\end{array}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto


$$(-\infty, 5)$$

### Ejemplo 2 ■ Resolviendo una desigualdad

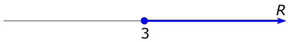
Hallar todos los números $x$ tal que

$$3x-5\le 5x-11$$

***Solución***

$$\begin{array}{rll}
3x-5 \le 5x-11 & & \\
3x-5+11-3x \le 5x-11+11-3x & & \text{sumamos 11 y restamos } 3x \text{ a ambos lados} \\
6 \le 2x & & \text{simplificamos} \\
\frac{1}{2}6 \le \frac{1}{2}2x & & \text{multiplicamos por } \tfrac{1}{2} \text{ ambos lados} \\
3 \le x & & \text{simplificamos}
\end{array}$$

El conjunto solución es el intervalo




$$[3, \infty)$$

### Ejemplo 3 ■ Resolviendo una doble desigualdad

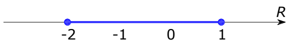
Hallar todos los números $x$ tal que

$$-3\le 2-5x\le 12$$

***Solución***

$$\begin{array}{ccccclll}
-3 & \le & 2-5x & \le & 12 & & \text{desigualdad original} \\
-3-2 & \le & 2-5x-2 & \le & 12-2 & & \text{restamos 2} \\
-5 & \le & -5x & \le & 10 & & \text{simplificamos} \\
\frac{-5}{-5} & \ge & \frac{-5x}{-5} & \ge & \frac{10}{-5} & & \text{dividimos por -5 (la desigualdad se invierte)} \\
1 & \ge & x & \ge & -2 & & \text{simplificamos}
\end{array}$$

El conjunto solución es el intervalo cerrado




$$[-2, 1]$$

## Ejemplo 4 ■ Resolviendo una desigualdad cúbica

Hallar todos los números $x$ tal que

$$(x+2)(x-1)(x-2)>0$$

***Solución***

El producto $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ vale cero en $-2$, 1 y 2. Estos tres puntos definen sobre la recta real cuatro intervalos:

$$(-\infty,-2) \qquad (-2,1) \qquad (1,2) \qquad (2,\infty)$$

En cada uno de esos intervalos el producto $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ tiene un signo constante. Veamos donde son positivos y negativos cada uno de los tres factores

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,1)$ | $(1,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

vemos en la tabla que el producto de los tres factores es positivo cuando $x$ está en el intervalo $(-2,1)$ o en el intervalo $(2,\infty)$. Las soluciones están representadas en la figura siguiente:


$$(-2,1)\cup(2,\infty)$$

---

*Para resolver desigualdades que incluyen cocientes se utiliza:*

| | |
|---|---|
| $\frac{a}{b}>0$ si y solo si $a\cdot b>0$ | $\frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow a\cdot b<0$ |

## Ejemplo 5 ■ Resolviendo una desigualdad racional

Resolver la desigualdad racional

$$\frac{x+1}{1-x}>1$$

***Solución***

$$\frac{x+1}{1-x}>1 \qquad \text{desigualdad original}$$

$$\frac{x+1}{1-x}-1>1-1 \qquad \text{sumamos -1 a ambos lados}$$

$$\frac{x+1-1+x}{1-x}>0 \qquad \text{simplificamos}$$

$$\frac{2x}{1-x}>0$$

Y como $\frac{a}{b}>0$ si y solo si $a\cdot b>0$, entonces la desigualdad es equivalente a $2x(1-x)$.

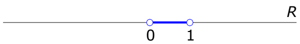
El producto $2x(1-x)$ vale cero en 0 y 1. Estos dos puntos definen sobre la recta real tres intervalos:

$$(-\infty,0) \qquad (0,1) \qquad (1,\infty)$$

En cada uno de esos intervalos el producto $2x(1-x)$ tiene un signo constante.

| | $(-\infty,0)$ | $(0,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $1-x$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $2x\cdot(1-x)$ | $-$ | $+$ | $+$ |

Como se puede comprobar sólo es positivo en el intervalo $(0,1)$. Este intervalo abierto es el conjunto de soluciones.




---

# ☐ Valor absoluto

## Valor absoluto de un número real:

Sea $x$ un número real, definimos valor absoluto de $x$ y lo representamos por $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

## Propiedades del valor absoluto:

Si $x$ e $y$ son números reales cualesquiera se cumplen las propiedades:

**1.** $|x| \geq 0$ $\qquad |x| = 0$ si y solo si $x = 0$

**2.** $|x| = \max\{x, -x\}$

**3.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ *El valor absoluto de un producto es el producto de sus valores absolutos*

**4.** $|x + y| \leq |x| + |y|$ ***Desigualdad triangular.*** *El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.*

## Otras propiedades:

De las propiedades anteriores puede deducirse si $x$, $y$, $z$ son números reales cualesquiera se cumple:

**5.** $|x - y| \leq |x| + |y|$

**6.** $|x - y| \geq |x| - |y|$

**7.** $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

**8.** $-|x| \leq x \leq |x|$

## Valor absoluto e intervalos

Si $a$ es un número real positivo cualquiera, entonces

**9.** $|x| = a$ si y solo si $x = \pm a$

**10.** $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$

**11.** $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$

Las propiedades 10 y 11 también son ciertas si reemplazamos ≤ por <.

### Ejemplo 6 ■ Resolver una desigualdad en valores absolutos

Representar el conjunto de números $x$ tales que $|x| < 3$

***Solución***

Un número positivo es en valor absoluto menor que 3 si el mismo es menor que 3. Un número negativo es en valor absoluto menor que 3 si el mismo es mayor que $-3$. Como $|0| < 3$, el conjunto pedido es el intervalo abierto $(-3, 3)$.

---

### Ejemplo 7 ■ Resolver una desigualdad en valores absolutos

Resolver $|2(x-1)| < 6$

***Solución***

| | | |
|---|---|---|
| $-6 < 2(x-1) < 6$ | escribimos como una doble desigualdad |
| $-3 < x-1 < 3$ | multiplicamos por $\frac{1}{2}$ ambos lados |
| $-2 < x < 4$ | sumamos 1 y simplificamos |

es decir, el conjunto pedido es el intervalo abierto $(-2, 4)$.

---

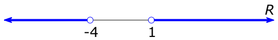
### Ejemplo 8 ■ Un conjunto de soluciones en dos intervalos

Resolver $|2x + 3| > 5$

***Solución***

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2x + 3 > 5$ | o | $2x + 3 < -5$ | propiedad 11 |
| $2x > 2$ | o | $2x < -8$ | sumamos -3 |
| $x > 1$ | | $x < -4$ | multiplicamos por $\frac{1}{2}$ |

La solución es, por lo tanto, $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$.




---

**Ejemplo 9** Doble desigualdad y valor absoluto

Representar el conjunto de números x tales que $0 < |\, x - 3\,| < 1$.

***Solución***

$$0 < |\, x - 3\,| \quad \text{para todo} \quad x \neq 3$$

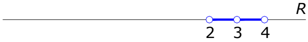
y $|\, x - 3\,| < 1$ si

$$\begin{array}{ccccc} -1 & < & x - 3 & < & 1 \\ 2 & < & x & < & 4 \end{array}$$

escribimos como una doble desigualdad

sumamos 3 y simplificamos

La solución es, por lo tanto, $(2,3) \cup (3,4)$.




**también**

$$0 < |\, x - a\,| < b$$

si y solo si

$$a - b < x < a \qquad \text{o} \qquad a < x < a + b$$

luego

$$0 < |\, x - 3\,| < 1 \qquad \text{si y solo si} \qquad 2 < x < 3 \qquad \text{o} \qquad 3 < x < 4$$

**Ejemplo 10** Desigualdad de valores absolutos

Resolver $|\, x - 3\,| > |\, x + 1\,|$.

***Solución***

Si *a* y *b* son números reales no negativos,

$$a^2 < b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a < b$$

Luego

$$|\, x - 3\,| > |\, x + 1\,| \quad \text{es equivalente a} \quad |\, x - 3\,|^2 > |\, x + 1\,|^2$$

$$\begin{array}{c} x^2 - 6x + 9 > x^2 + 2x + 1 \\ -8x > -8 \\ x < 1 \end{array}$$

sumando y restando convenientemente

multiplicamos por $-\frac{1}{8}$ ambos lados

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 1)$

## Definición de distancia en *R*

Si *x* e *y* pertenecen a *R*, llamamos distancia de *x* a *y*, y designamos como $d(x, y)$, al número real positivo

$$d(x, y) = |\, x - y\,|$$

### Propiedades:

Si *x*, *y*, *z* son números reales cualesquiera se cumplen las propiedades:

**1.** $d(x, y) \geq 0$

**2.** $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

**3.** $d(x, y) = d(y, x)$

**4.** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

El valor absoluto $|\, a\,|$ de un número real *a* se considera como la distancia de *a* al origen *O*.

## Métrica. Espacio métrico

Cuando en un conjunto *X* hay definida una aplicación con las propiedades de *d*, ésta se denomina una métrica, o bien, una distancia en *X*, y la pareja (*X*,*d*) se denomina un espacio métrico. Así pues, (R,*d*) es un espacio métrico y la distancia *d* definida anteriormente se denomina distancia euclídea.

# Aa.3e Ejercicios

**1.** Resolver las siguientes desigualdades:

1. $2 + 2x < 4$ a. $x^2 - 1 < 0$ b. $\dfrac{x}{x-5} > 0$

c. $x^3 - 2x^2 + x > 0$ d. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{4}{x-2} > 0$ e. $\dfrac{x^2 - 4x}{x+2} > 0$

**2.** Resolver las siguientes desigualdades:

a. $1 \le 2 + 2x \le 4$ b. $x^3 < 8$ c. $\dfrac{1}{2x} > -1$

d. $-3 \le x^2 - 2x \le 0$ e. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$ f. $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{1}{2}$

**3.** Demostrar que para todo *a* y *b* reales se cumple

$$2ab \le a^2 + b^2$$

**4.** Sean x e y dos números reales positivos cualesquiera, probar que se cumple

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

***(desigualdad de las medias aritmética y geométrica)***

**5.** Resolver las siguientes desigualdades

a. $|x| < 1$ b. $|x - 1| < 1$ c. $0 < |x - 1| < 1$

d. $|x| \ge 4$ e. $|2x + 5| > 3$ f. $\left|\dfrac{x}{x-5}\right| < 0$

**6.** Hallar los números naturales cuyo triple menos siete unidades es mayor que su duplo mas cinco unidades.

**7.** Las dimensiones de una parcela rectangular se ha medido con un error menor que 1 m. Los valores para las longitudes *a* y *b* son:

$$120 \le a \le 121 \qquad 54 \le b \le 55$$

- ¿Entre que números está comprendido el perímetro? ¿Y el área?

**8.** ¿Qué número natural se puede añadir al numerador y al denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ si se quiere que la nueva fracción esté comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.

**9.** Determinar los números reales *x* tales que:

a. $|x - 3| = 2$ b. $|x - 1| + |x + 3| = 4$ c. $|x + 1| + |x + 2| < 2$

d. $|x + 1||x - 2| = 3$ e. $|x - 1| = 1 - x$ f. $|x + 3| - |x - 1| < 2$

**10.** Si $|x| \le 3$ y $x > -\frac{1}{2}$, que podemos afirmar de *x*.

**11.** Justificar cada uno de los siguientes pasos para demostrar la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 && (1)\\
&= a^2 + 2ab + b^2 &&\\
&\le a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\
&= [|a| + |b|]^2 &&\\
|a+b|^2 &\le |a| + |b| && (4)
\end{aligned}$$

# Aa.4 Expresiones algebraicas

## ☐ Expresión algebraica

### Definición de Expresión algebraica:

Se llama **expresión algebraica** a una combinación cualquiera de letras (llamadas **variables**) y números reales (llamados **constantes**), relacionadas un número finito de veces por los signos de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. Algunos ejemplos:

$$3x, \quad 2^n xy, \quad \frac{x}{x^2+1}, \quad \frac{1}{2}mgx^2, \quad 2x-3y$$

Los **términos** de una expresión algebraica son las partes separadas por la adición. Por ejemplo, la expresión algebraica $x^2-4x+3$ tiene tres términos: $x^2$, $-4x$, y $3$.

$$x^2-4x+3 = x^2+(-4x)+3$$

El valor numérico de cada término se llama **coeficiente**.

*En el ejemplo anterior, a los términos $x^2$ y $-4x$ se les llama **términos variables** y al 3 **término constante**; $1$, $-4$ y $3$ son los coeficientes. (El término constante de una expresión también se considera coeficiente)*

### Ejemplo 1 ■ Identificar términos y coeficientes

Identificar los términos y coeficientes de cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

*a.* $3x-\frac{2}{3}$   *b.* $2x+3y-5$   *c.* $xy-\frac{1}{x}+3y$

***Solución***

| | *términos* | *coeficientes* | | *términos* | *coeficientes* | | *términos* | *coeficientes* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a.* | $3x, -\frac{2}{3}$ | $3, -\frac{2}{3}$ | *b.* | $2x, 3y, -5$ | $2, 3, -5$ | *c.* | $xy, -\frac{1}{x}, 3y$ | $1, -1, 3$ |

---

### Valor numérico de las expresiones algebraicas

**Valor numérico** es un número obtenido al dar valores fijos a las variables que figuran en una expresión algebraica.

Dos *expresiones algebraicas* son **equivalentes** si tienen iguales valores para todo sistema de valores atribuidos a las variables.

### Ejemplo 2 ■ Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de $\frac{\sqrt{x}-y\sqrt{xy}+1}{x-1}$ para $x=4$ e $y=3$ es.

$$\frac{\sqrt{x}-y\sqrt{xy}+1}{x-1} = \frac{\sqrt{4}-3\sqrt{4\cdot 3}+1}{4-1} = \frac{3-6\sqrt{3}}{3} = 1-2\sqrt{3}$$

---

### Ejemplo 3 ■ Expresiones algebraicas equivalentes

La expresión $x^2-1$ es equivalente a $(x+1)(x-1)$ pues tienen los mismos valores para todo *x*.

La expresión algebraica

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

carece de sentido para $x=1$. Pero si suprimimos el factor $x-1$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

esta última es equivalente para todos los valores distintos de $1$ y para este toma el valor $2$. Decimos que 2 es el **verdadero valor** de la expresión dada, para $x=1$.

---

### Tipos de expresiones algebraicas:

- Expresiones algebraicas **racionales** *(cuando las variables no están afectadas por la radicación)*
  - **Enteras** *(cuando las variables están afectadas sólo por operaciones de suma, resta, multiplicación y potencia natural)*
  - **Fraccionarias** *(cuando las variables aparecen en un deominador)*
- Expresiones algebraicas **irracionales** *(cuando las variables están afectadas por la radicación)*

## Propiedades de las expresiones algebraicas

Las propiedades de los números reales se pueden usar para reescribir las expresiones algebraicas. La siguiente lista es similar a la de las propiedades de los números reales pero con ejemplos de expresiones algebraicas.

Sean *a, b, y c*, números reales, variables o expresiones algebraicas

| ***Propiedad*** | ***Ejemplo*** |
|---|---|
| *Conmutativa de la suma* | |
| $a+b=b+a$ | $3x-2x^2=-2x^2+3x$ |
| *Conmutativa del producto* | |
| $ab=ba$ | $(3-x)x^2=x^2(3-x)$ |
| *Asociativa de la suma* | |
| $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(-x+6)-2x^2=-x+(6-2x^2)$ |
| *Asociativa del producto* | |
| $(ab)c=a(bc)$ | $(4x^2\cdot 3y)(3)=(4x^2)(3y\cdot 3)$ |
| *Distributiva respecto de la suma* | |
| $a(b+c)=ab+ac$ | $2x(4-3x)=2x\cdot 4-2x\cdot 3x$ |
| $(a+b)c=ac+bc$ | $(y+2)y=x\cdot y+2\cdot y$ |
| *Elemento neutro de la suma* | |
| $a+0=0+a=a$ | $-2x^2+0=0+(-2x^2)=-2x^2$ |
| *Elemento neutro del producto* | |
| $a\cdot 1=1\cdot a=a$ | $(-2x^2)(1)=(1)(-2x^2)=-2x^2$ |
| *Elemento opuesto* | |
| $a+(-a)=(-a)+a=0$ | $-2x^2+(2x^2)=0$ |
| *Elemento inverso* | |
| $a\cdot\frac{1}{a}=1 \quad a\neq 0$ | $\left[1+x^2\right]\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=1$ |

### Ejemplo 4 — Identificando propiedades

Identificar las propiedades en los siguientes ejemplos:

*a.* $(5x^2)3=3(5x^2)$

*b.* $\left[x^2-x\right]-\left[x^2-x\right]=0$

*c.* $7x^2+7y^2=7\left[x^2+y^2\right]$

*d.* $\left[5+x^2\right]+3x^2=5+\left[x^2+3x^2\right]$

*e.* $3x\cdot\frac{1}{3x}=1,\quad x\neq 0$

*f.* $(x-3)z+(x-3)5=(x-3)(z+5)$

***Solución***

*a.* *Conmutativa del producto. Obtenemos el mismo resultado si multiplicamos* $5x^2$ *por 3 que 3 por* $5x^2$.

*b.* *Elemento opuesto. Si a una expresión le restamos ella misma el resultado es cero*

*c.* *Distributiva respecto de la suma.*

*d.* *Asociativa de la suma. No importa que sumemos primero*

*e.* *Elemento inverso. Es importante que x no sea cero, porque si no el inverso no está definido.*

*f.* *Distributiva en distinto orden.*

$$ab+ac=a(b+c) \qquad (x-3)z+(x-3)5=(x-3)(z+5)$$

*nótese que en este ejemplo* $a=x-3,\ b=z\ \ y\ \ c=5$

# Exponentes

Los exponentes son notaciones simples para representar una cantidad o expresión que se multiplica una o varias veces. Todas las reglas para manipular exponentes se pueden deducir de las leyes de multiplicación y división que nos son familiares.

***Potencia***: Producto que resulta de multiplicar una cantidad o expresión por sí misma una o más veces.

***Exponente***: Número o expresión algebraica que denota la potencia a que se ha de elevar otro número u otra expresión, y se coloca en su parte superior a la derecha.

***Factor***: Cada una de las cantidades o expresiones que se multiplican para formar un producto.

## Notación exponencial

La multiplicación repetida se representa usando la notación exponencial, por ejemplo:

$$7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

Hay tres factores en el producto, cada uno de los cuales es 3. En la expresión $7^3$, al número 3 se le llama **exponente** y al 7 **base**.

Si ***a*** es un **número real** y ***n*** un **número natural**, el producto de $n$ factores de $a$ está dado por la forma

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n \text{ factores}}$$

donde se entiende que $a^1 = a$. Por lo tanto, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, y asi sucesivamente.

En la expresión $a^n$, $a$ es la **base** y $n$ el **exponente** o la potencia. Leemos $a^n$ como "$a$ elevado a la potencia $n$", "$a$ elevado a $n$", ó "$a$ a la ***enésima*** potencia". Generalmente leemos $a^2$ como "$a$ cuadrado", $a^3$ como "$a$ cubo", etc. Debemos tener cuidado al usar paréntesis junto con exponentes. Por ejemplo,

$$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16 \,, \qquad \text{mientras que} \qquad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 \,.$$

*Si* $a \neq 0$ y $n$ un número natural

| | |
|---|---|
| $a^0 = 1$ | $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ |

## Reglas de los exponentes

Sean *a, b, y c*, números reales, variables o expresiones algebraicas

| | ***Regla*** | ***Ejemplo*** |
|---|---|---|
| a. | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$ |
| b. | $[a \cdot b]^n = a^n \cdot b^n$ | $[3x]^3 = [3]^3 [x]^3 = 27x^3$ |
| c. | $\left[a^m\right]^n = a^{m \cdot n}$ | $\left[x^2\right]^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$ |
| d. | $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ si $a \neq 0$ | $\dfrac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$ |
| e. | $\left[\dfrac{a}{b}\right]^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$ | $\left[\dfrac{x}{3}\right]^3 = \dfrac{x^3}{3^3} = \dfrac{x^3}{27}$ |

La 1ª y 2ª regla de los exponentes puede extenderse a productos que tengan tres o más factores. Por ejemplo:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p} \qquad [a \cdot b \cdot c]^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

## Ejemplo 5 — Aclarando las reglas

**a.** *Para multiplicar expresiones exponenciales que tienen la misma base, se suman los exponentes.*

$$x^2 \cdot x^3 = \overbrace{[x \cdot x]}^{2 \text{ factores}} \cdot \overbrace{[x \cdot x \cdot x]}^{3 \text{ factores}} = \overbrace{[x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x]}^{5 \text{ factores}} = x^{2+3} = x^5$$

**b.** *El producto de dos factores elevado a una misma potencia es el producto de cada factor elevado a esa potencia.*

$$[3x]^3 = \overbrace{3x \cdot 3x \cdot 3x}^{3 \text{ factores}} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}^{3 \text{ factores}} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x}^{3 \text{ factores}} = 3^3 \cdot x^3 = 27x^3$$

## Ejemplo 6 Aclarando las reglas

**a.** *Para elevar una expresión exponencial a una potencia, se multiplican los exponentes.*

$$\left[x^3\right]^2 = \overbrace{x\cdot x\cdot x}^{3\text{ factores}}\cdot\overbrace{x\cdot x\cdot x}^{3\text{ factores}} = \overbrace{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}^{6\text{ factores}} = x^{3\cdot 2} = x^6$$

**b.** *Para dividir una expresión exponencial que tiene la misma base, se restan los exponentes.*

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{\overbrace{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}^{5\text{ factores}}}{\underbrace{x\cdot x\cdot x}_{3\text{ factores}}} = x^{5-3} = x^2$$

**c.** *El cociente de dos expresiones elevadas a una misma potencia, es el cociente de cada una elevada a esa misma potencia.*

$$\left[\frac{x}{2}\right]^3 = \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\overbrace{x\cdot x\cdot x}^{3\text{ factores}}}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{3\text{ factores}}} = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$$

---

## Ejemplo 7 Aplicando las reglas de los exponentes

Usar las reglas de los exponentes para simplificar cada expresión:

**a.** $4b\cdot[3b]^5$ **b.** $\left[-2x^2\right]^3$ **c.** $\left[3x^2\right][-2x]^3$ **d.** $\left[2x^3\right]^2\cdot\left[\frac{3}{x^2}\right]^4$

***Solución***

**a.** $4b\cdot[3b]^5 = 4b\cdot 3^5\cdot b^5 = 4\cdot 243\cdot b\cdot b^5 = 972\cdot b^6$

**b.** $\left[-2x^2\right]^3 = [-2]^3\left[x^2\right]^3 = -8x^{2\cdot 3} = -8x^6$

**c.** $\left[3x^2\right][-2x]^3 = 3[-2]^3\left[x^2\cdot x^3\right] = 3[-8]\left[x^{2+3}\right] = -24x^5$

**d.** $\left[2x^3\right]^2\cdot\left[\frac{3}{x^2}\right]^4 = 2^2\cdot\left[x^3\right]^2\cdot\frac{3^4}{\left[x^2\right]^4} = 4\cdot 81\cdot x^6\cdot\frac{1}{x^8} = 324\cdot x^{-2}$

---

## Ejemplo 8 Aplicando las reglas de los exponentes

Usar las reglas de los exponentes para simplificar cada expresión:

**a.** $\frac{\left[2a^2b^3\right]^2}{a^3b^2}$ **b.** $\left[\frac{3^{-1}\cdot b}{b^{-2}}\right]^{-3}$ **c.** $\left[2yx^3\right]^{-1}\frac{1}{x^{-8}}$ **d.** $\left[a^2+r^2\right]^2$

***Solución***

**a.** $\frac{\left[2a^2b^3\right]^2}{a^3b^2} = \frac{2^2\left[a^{2\cdot 2}\right]\left[b^{3\cdot 2}\right]}{a^3b^2} = \frac{4a^4b^6}{a^3b^2} = 4ab^4$

**b.** $\left[\frac{3^{-1}\cdot b}{b^{-2}}\right]^{-3} = \frac{\left[3^{-1}\cdot b\right]^{-3}}{\left[b^{-2}\right]^{-3}} = \frac{3^3\cdot b^{-3}}{b^6} = 3^3\cdot b^{-3-6} = 27\cdot b^{-9}$

**c.** $\left[2yx^3\right]^{-1}\cdot\frac{1}{x^{-8}} = 2^{-1}\cdot[y]^{-1}\cdot\left[x^3\right]^{-1}\cdot\frac{1}{x^{-8}} = \frac{1}{2}\cdot y^{-1}\cdot x^{-3}\cdot\frac{1}{x^{-8}} = \frac{1}{2}\cdot y^{-1}\cdot x^{-3-(-8)} = \frac{1}{2}\cdot y^{-1}\cdot x^5$

**d.** $\left[a^2+r^2\right]^2 = \left[a^2+r^2\right]\cdot\left[a^2+r^2\right] = a^2\left[a^2+r^2\right]+r^2\left[a^2+r^2\right] = a^4+2a^2r^2+r^4$

*no hay reglas de los exponentes cuando los términos dentro del paréntesis están sumando, en particular*

$$[a+b]^n \neq a^n+b^n$$

---

# Exponentes racionales

Los radicales son usados para definir exponentes racionales.

Si $a$ es un número real y $n \geq 2$ ($n$ mayor o igual que 2) es un entero, entonces:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

suponiendo que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ exista.

Si $a > 0$ es un número real y $q = \frac{m}{n}$ un número racional (donde $m \in Z, n \in N$). Se llama potencia de **base *a*** y **exponente *q*** al número real:

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left[\sqrt[n]{a}\right]^m$$

### Raíz enésima principal de un número *a*

Simbolizada con $\sqrt[n]{a}$, está definida

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa} \quad a = b^n$$

donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si $n$ es par y $a$, $b$ son cualesquiera números reales si $n$ es impar.

Vemos que cuando $a$ es *negativo* y $n$ *par*, entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definida. Cuando lo está, la raíz enésima principal es única. El símbolo $\sqrt{\ }$ con el que se indica la operación de extraer raíces se llama **radical**; el entero ***n*** es el **índice** y ***a*** el **radicando**. Si el índice de un radical es 2, nos referimos a $\sqrt[2]{a}$ como la **raíz cuadrada** de $a$ y omitimos el índice 2 para escribir de manera más sencilla $\sqrt{a}$. Si el índice es 3, nos referimos a $\sqrt[3]{a}$ como la **raíz cúbica**.

## Ejemplo 9 Simplificación de raíces principales enésimas

Usar las reglas de los exponentes para simplificar cada expresión:

*a.* $\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $8 = 2^3$

*b.* $\sqrt{64} = 8$ ya que $64 = 8^2$

*c.* $\sqrt[3]{-64} = -4$ ya que $-64 = (-4)^3$

*d.* $\sqrt{0} = 0$ ya que $0 = 0^2$

---

Estos son ejemplos de **raíces perfectas**. En general si $n \geq 2$ es un natural y $a$ un número real:

### Raíz enésima principal de un número *a*

| | |
|---|---|
| $\sqrt[n]{a^n} = a$ | si $n$ es impar |
| $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ | si $n$ es par |

Si $n$ es par entonces $a^n$ es positivo, sin importar que $a > 0$ o $a < 0$. Pero si $n$ es par, la raíz enésima principal no debe ser negativa. De ahí el uso del valor absoluto.

## Ejemplo 10 Simplificación de radicales

Usar las reglas de los exponentes para simplificar cada expresión:

*a.* $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

*b.* $\sqrt[3]{-16} = \sqrt[3]{-8 \cdot 2} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$

*c.* $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$

*d.* $8^{2/3} = \left[\sqrt[3]{8}\right]^2 = [2]^2 = 4$

*e.* $\left[-8x^5\right]^{1/3} = \sqrt[3]{-8x^5} = \sqrt[3]{-8x^3 \cdot x^2} = \sqrt[3]{\left[-2x\right]^3}\sqrt[3]{x^2} = -2x\sqrt[3]{x^2}$

*f.* $\sqrt{\dfrac{64k^2}{9T^5}} = \dfrac{\sqrt{64k^2}}{\sqrt{9T^5}} = \dfrac{\sqrt{64} \cdot \sqrt{k^2}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{T^5}} = \dfrac{8k}{3\sqrt{T^4 \cdot T}} = \dfrac{8k}{3T^2\sqrt{T}}$

---

## Racionalización

Cuando los radicales aparecen en cocientes, es práctica común reescribir el cociente de modo que el denominador no contenga radicales. Este proceso se llama **racionalización del denominador.**

### Ejemplo 11 ■ Denominador formado por una sola raíz cuadrada

Es suficiente con multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada, como vemos en los siguientes ejemplos:

*a.* $\frac{3}{\sqrt{2}}$ *b.* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ *c.* $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

***Solución***

*a.* $$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

*b.* $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

*c.* $$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

---

### Ejemplo 12 ■ Denominador con dos términos, uno o los dos con una raíz cuadrada

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador, como vemos en los siguientes ejemplos:

*a.* $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ *b.* $\frac{2}{3-\sqrt{7}}$ *c.* $\frac{x}{1-\sqrt{1+x^2}}$

***Solución***

*a.* $$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\left[\sqrt{5}+\sqrt{3}\right]}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

*b.* $$\frac{2}{3-\sqrt{7}}=\frac{2}{3-\sqrt{7}}\frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\frac{2\left[3+\sqrt{7}\right]}{9-7}=3+\sqrt{7}$$

*c.* $$\frac{x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}{\left[1-\sqrt{1+x^2}\right]\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}=\frac{x\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}{1-1-x^2}=-\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

---

### Ejemplo 13 ■ Denominador con una raíz de índice cualquiera *n*.

Se multiplica numerador y denominador por otra raíz de índice *n* que complete una potencia de exponente *n*, como vemos en los siguientes ejemplos:

*a.* $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ *b.* $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ *c.* $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}$

***Solución***

*a.* $$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

*b.* $$\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=\frac{2}{\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{2\sqrt[4]{2^3}}{2}=\sqrt[4]{2^3}$$

*c.* $$\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}=\frac{6\sqrt{3}\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}=\frac{6\sqrt{3}\sqrt[3]{2^2}}{3\cdot 2}=\sqrt{3}\sqrt[3]{2^2}$$

---

# ☐ Simplificando expresiones algebraicas

**Simplificar:** Reducir una expresión, cantidad o ecuación a su forma más breve y sencilla.

Uno de los usos más comunes de las propiedades del álgebra es para reescribir una expresión algebraica de la forma más simple. Para simplificar una expresión algebraica **quitamos símbolos** como paréntesis y corchetes y **agrupamos términos iguales**.

**Orden de las operaciones algebraicas:**

> Cuando se combinan varias operaciones, el orden es, comenzando por la izquierda: primero, la potenciación y la radicación; después, la multiplicación y la división; luego, la adición y la sustracción; pero antes se resuelven los paréntesis.

Si dos o más términos tienen las mismas constantes o las mismas variables decimos que son términos iguales

Para agrupar términos iguales en una expresión algebraica, simplificamos sus coeficientes y sacamos factor común a las variables. Es una aplicación de la Propiedad distributiva respecto de la suma, como enseñamos en los siguientes ejemplos:

## Ejemplo 14 ■ Agrupar términos iguales

Simplificar cada expresión agrupando términos iguales:

*a.* $5x-3x+4=$ *b.* $-1+5+2y+6y=$ *c.* $5x-3y+4x=$

***Solución***

*a.* $5x-3x+4 = (5-3)x+4 =$ propiedad distributiva
$= 2x+4$ forma simple

*b.* $-1+5+2y+6y = (-1+5)+(2+6)y =$ propiedad distributiva
$= 4+8y$ forma simple

*c.* $5x-3y+4x = 5x+4x-3y =$ agrupamos terminos
$= (5x-4x)-3y =$ asociativa
$= (5+4)x-3y =$ distributiva
$= 9x-3y$ forma simple

---

*Una expresión algebraica encerrada entre paréntesis y precedida por el signo menos cambia todos los signos al quitar el paréntesis, por ejemplo:*

$$8x-(5x-4)=8x-5x+4=3x+4$$

*si está precedido del signo más podemos quitar los paréntesis sin cambiar los signos.*

$$7x+(3x-4)=7x+3x-4=10x-4$$

## Ejemplo 15 ■ Combinar términos y quitar paréntesis

Simplificar cada expresión combinando términos iguales:

*a.* $3(x-5)-(2x-7)=$ *b.* $2x^2+3x-(5x^2+x)=$ *c.* $5x-2x[3+2(x-7)]=$

***Solución***

*a.* $3(x-5)-(2x-7) = 3x-15-2x+7 =$ propiedad distributiva
$= (3x-2x)+(-15+7) =$ agrupar terminos
$= x-8$ operar

*b.* $2x^2+3x-(5x^2+x) = 2x^2+3x-5x^2-x =$ propiedad distributiva
$= (2x^2-5x^2)+(3x-x) =$ agrupar terminos
$= -3x^2+2x$ operar

*c.* $5x-2x[3+2(x-7)] = 5x-2x[3+2x-14] =$ quitamos parentesis
$= 5x-2x[2x-11] =$ operamos dentro del corchete
$= 5x-4x^2+22x =$ quitamos corchete
$= -4x^2+27x$ operamos terminos iguales

---

# Aa.4e Ejercicios

## 1. Resolver sin usar la calculadora

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $7^2 =$ | b. | $3^0 =$ | c. | $\sqrt[3]{-8} =$ | d. | $\sqrt{(-8)^2} =$ |
| e. | $\sqrt{9^9} =$ | f. | $(-1)^4 =$ | g. | $(-1)^5 =$ | h. | $\sqrt[3]{8} =$ |
| i. | $\dfrac{1}{3^0} =$ | j. | $\dfrac{(12)^3}{(-12)^3} =$ | k. | $\dfrac{9^2}{9^3} =$ | l. | $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt{16}} =$ |

## 2. Usar las reglas de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $(-5a^2b^3)(ab^2) =$ | b. | $\dfrac{-5a^2b^3}{2ab^2} =$ | c. | $\dfrac{\left[-5a^2\right]^2 b^3}{-2(ab)^2} =$ | d. | $\dfrac{x^{m+1}}{x^m} =$ |
| e. | $\dfrac{3x^n - 2x^3}{x^3} =$ | f. | $(-6n)\left[-3n^2\right] =$ | g. | $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(9x)^3} =$ | h. | $\left[\dfrac{x^{2n}y^m}{x^4y^3}\right]^2 =$ |

## 3. Simplificar las siguientes expresiones tanto como sea posible:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $e \cdot e^{2t} \cdot e^t \cdot 2^e$ | b. | $\dfrac{x^{2n+1}(2y)^{n+1}}{(x^2y)^n}$ | c. | $(a-b)^{\frac{5}{2}}\sqrt{a+b}$ | d. | $(T^2 \cdot w^4)^{\frac{1}{2}}$ |
| e. | $e \cdot \sqrt[3]{e^{3r}}$ | f. | $\left[\dfrac{2y^2 \cdot z^{3/2}}{\sqrt{y+z}}\right]^2$ | g. | $\left[C \cdot e^{wt}\right]^2$ | h. | $[5xy]^{-1} \cdot \left[xy^2\right]^2$ |
| i. | $\sqrt{36u^2v}$ | j. | $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$ | k. | $\dfrac{x^{-1}y^{-2}z}{x^2yz^3}$ | l. | $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$ |

## 4. Simplificar las siguientes expresiones tanto como sea posible:

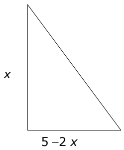
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a. | $4(x-3)+2x-3$ | b. | $(7y^2+5)-(5y^2+5)$ | c. | $2x\left[3x-(5x-4)\right]$ |
| d. | $-\left[4(t+1)-(t^2-t+1)\right]$ | e. | $x(xy^2+y)-xy(xy+1)$ | f. | $-2a\left[3a^2\right]^3+\dfrac{9a^8}{3a}$ |
| g. | $-x\left[4(x+1)-x(x+1)\right]$ | h. | $xy\left[(xy+1)-y\left[x+\dfrac{1}{y}\right]\right]$ | i. | $-2x\left[\dfrac{x^2}{y}\right]^3+\dfrac{9y^8}{x}$ |

## 5. Razonar si las igualdades propuestas son verdaderas o falsas

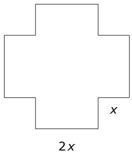
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a. | $(a+b)^2 = a^2+b^2$ | b. | $r^2+r^2=r^4$ | c. | $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ |
| d. | $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ | e. | $10q^{-2}=\dfrac{1}{10q^2}$ | f. | $\dfrac{x^a}{x^{-b}}=x^{a-b}$ |

## 6. Hallar una expresión simplificada para el perímetro y el área de cada y una de las siguientes figuras:

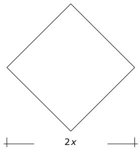
a.



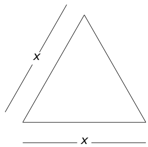

b.




c.




d.




## 7. Encontrar una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

| *Enunciado* | *Expresión algebraica* | *Enunciado* | *Expresión algebraica* |
|---|---|---|---|
| • Un número aumentado en cuatro: | | • El triple de un número | |
| • Si me dan el doble de lo que gano tengo | | • Si doy 5 euros me quedo con: | |
| • Un número par: | | • Un número impar: | |
| • Dos números pares consecutivos: | | • Dos números impares consecutivos: | |
| • La suma de un número y su mitad es igual a 20: | | • El área de un triángulo (*A*) es igual a la mitad de su base (*b*) por la altura (*h*): | |
| • La suma de la mitad de mi edad (*a*) más el doble de la edad de mi hermano (*b*) es igual a la de mi padre (*c*): | | • El doble de la suma de la mitad de la edad de mi padre (*a*) y de la tercera parte de la edad de mi madre (*b*) es la edad de mi abuelo (*c*): | |

# Aa.5 Polinomios

## Definiciones básicas

**Monomio:**

Expresión algebraica que consta de un solo término. También, **monomio** en una variable es el producto de un constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa, es por lo tanto de la forma:

$$ax^k$$

donde $a$ es una constante, $x$ una variable y $k \geq 0$ un entero.

**Polinomio:**

Expresión compuesta de dos o más términos algebraicos unidos por los signos más o menos. También, **polinomio** en una variable es una expresión algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son constantes, llamadas **coeficientes** del polinomio.
- $n \geq 0$ es un entero, y $x$ una variable.
- $a_n$ es el **coeficiente principal** *y* $a_0$ es el **término independiente**.
- El **grado de un polinomio** es el grado del término con la potencia más alta.
- El polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ está ordenado en **forma decreciente**.
- El polinomio $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ está ordenado en **forma creciente**.
- El **polinomio nulo** es el que tiene todos los coeficientes ceros.
- Dos **polinomios** son **iguales**, si tienen el mismo grado e iguales coeficientes (o si al restarlos obtenemos el polinomio nulo)
- Dos **polinomios** son **opuestos**, si al sumarlos obtenemos el polinomio nulo.
- Un **polinomio** está **completo** si aparecen en él todas las potencias menores de la variable, a partir de la mayor de ellas. Si es necesario, se completa agregándole, con coeficiente nulo, los términos que faltan.
- **Monomios, binomios, trinomios** son los polinomios formados por uno, dos y tres términos respectivamente

### Ejemplo 1 — Identificar grado y coeficiente principal

Identificar el grado y el coeficiente principal de los siguentes polinomios:

*a.* $3x^2 - 2x + 1$ *b.* $x^3 - 5$ *c.* $1 + x - x^2$

***Solución***

| | grado | c. principal |
|---|---|---|
| *a.* | 2 | 3 |
| *b.* | 3 | 1 |
| *c.* | 2 | $-1$ |

### Ejemplo 2 — No son polinomios

Explicar porqué las siguientes expresiones algebraicas no son polinomios:

*a.* $2x^{-1} + 3$ *b.* $x^2 - 3x^{1/2}$

***Solución***

*a.* el exponente en $2x^{-1}$ es negativo

*b.* El exponente en $-3x^{1/2}$ no es un entero

## □ Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan los monomios **semejantes**. (Los términos que sólo difieren en sus coeficientes constantes se llaman **términos semejantes**)

La suma de expresiones enteras tiene las propiedades conmutativa, asociativa y uniforme.

Reducir términos semejantes es sumarlos o restarlos, ya que en este caso la suma o diferencia da un único monomio.

La resta de polinomios es la suma del primero con el opuesto del segundo.

### Ejemplo 3 ■ Suma horizontal de polinomios

Si $P(x) = x^5 + 3x^3 + 7$ y $Q(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 7$, calcular $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$.

***Solución***

$$\begin{array}{rcllr}
P(x)+Q(x) & = & (x^5+3x^3+7)+(x^5-3x^3+x^2-7) & = & \text{escribimos los polinomios} \\
 & = & (x^5+x^5)+(3x^3-3x^3)+(x^2)+(7-7) & = & \text{agrupamos terminos semejantes} \\
 & = & 2x^5+x^2 & & \text{operamos}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcllr}
P(x)+Q(x) & = & (x^5+3x^3+7)-(x^5-3x^3+x^2-7) & = & \text{escribimos los polinomios} \\
 & = & (x^5+3x^3+7)+(-x^5+3x^3-x^2+7) & = & \text{sumamos el opuesto} \\
 & = & (x^5-x^5)+(3x^3+3x^3)+(-x^2)+(7+7) & = & \text{agrupamos terminos} \\
 & & 6x^3-x^2+14 & & \text{operamos}
\end{array}$$

---

### Ejemplo 4 ■ Suma vertical de polinomios

Para sumar polinomios en forma vertical, ordenamos los polinomios de manera creciente (o decreciente) y los enfrentamos según su grado, como se muestra a continuación.

Sumar en forma vertical $5x^3 + 2x^2 - x + 3$, $3x^2 - 7$ y $-2x^3 + 4x^2 + x$ .

***Solución***

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x^3 & + & 2x^2 & - & x & + & 3 \\
 & & 3x^2 & & & - & 7 \\
-2x^3 & + & 4x^2 & + & x & & \\
\hline
3x^3 & + & 9x^2 & & & - & 4
\end{array}$$

---

### Ejemplo 5 ■ Resta vertical de polinomios

Si $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 5$ y $Q(x) = 2x^4 - 2x^3 - x - 1$. Calcular $P(x) - Q(x)$ en forma vertical.

***Solución***

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & - & x & + & 5 \\
-(2x^4 & - & 2x^3 & & & - & x & - & 1) \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\Rightarrow \\
\Rightarrow \\
\
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & - & x & + & 5 \\
-2x^4 & + & 2x^3 & & & & x & + & 1 \\
\hline
x^4 & & & + & 4x^2 & & & + & 6
\end{array}$$

---

Cuando restamos un polinomio de otro debemos ser especialmente cuidadosos con los signos. Uno de los errores más comunes es cambiar solo el signo del primer término como se señala en el siguiente ejemplo:

$$(x^2-2x-3) \;-\; (x^2+2x-2) \;\neq\; x^2-2x-3-x^2 \;\overset{\substack{\text{signo erroneo}\\ \downarrow}}{+}\; 2x \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{signo erroneo}}}{-}\; 2 \quad \text{error comun}$$

## Multiplicación de polinomios

La **multiplicación de monomios** se basa en el producto de potencias de la misma base y la propiedad asociativa del producto. Primero se multiplican los números y luego las letras:

$$5x^5 \cdot 3x^3 = 15x^8$$

$$3x \cdot 3x^2 \cdot x^3 = 9x^6$$

La **multiplicación de polinomios** se reduce a multiplicar y aplicar varias veces la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes.

### Ejemplo 6 — Multiplicar monomios por polinomios

Multiplicar los monomios por lo polinomios siguientes

a. $(2x-5)(-3x)$ b. $3x^2(-2x^2+3x-1)$ c. $-x(x^4-x^2-1)=$

***Solución***

a. $(2x-5)(-3x) = 2x(-3x)-5(-3x) =$ Distributiva
$= -6x^2+15x$ reglas de los exponentes

b. $3x^2(-2x^2+3x-1) = 3x^2(-2x^2)+3x^2(3x)+3x^2(-1) =$ Distributiva
$= -6x^4+9x^3-3x^2$ reglas de los exponentes

c. $-x(x^4-x^2-1) = -x(x^4)-x(-x^2)-x(-1) =$ Distributiva
$= -x^5+x^3+x =$ reglas de los exponentes

---

Para multiplicar dos binomios, podemos usar las dos maneras de la propiedad distributiva (derecha e izquierda). Para multiplicar $(x-1)$ por $(x+3)$ consideramos el binomio $(x+3)$ como una cantidad y multiplicamos como sigue:

$$\begin{aligned}(x-1)(x+3) &= x(x+3)-(x+3) = && \text{distributiva}\\ &= x^2+3x-x-3 = && \text{distributiva}\\ &= x^2+2x-3 && \text{agrupar terminos}\end{aligned}$$

También podemos multiplicarlos de manera similar a como hacíamos con los productos de números enteros, si alineamos términos iguales en columnas verticales (**multiplicación vertical**), como vemos en el siguiente ejemplo:

### Ejemplo 7 — Multiplicación de binomios

Multiplicar los binomios siguientes aplicando la propiedad distributiva o la multiplicación vertical.

a. $(x-3)(x-9)$ b. $(3x-2)(2x^2+1)$ c. $(x-a)(x+a)$

***Solución***

a.
$$\begin{aligned}(x-3)(x-9) &= x(x-9)-3(x-9) = && \text{distributiva}\\ &= x^2-9x-3x+27 = && \text{distributiva}\\ &= x^2-12x+27 && \text{agrupar terminos}\end{aligned}$$

b. La idea es similar a multiplicar un número de dos dígitos por otro de dos-

$$\begin{array}{rrrrl} & 2x^2 & & +\ 1 & \\ & & 3x & -\ 2 & \\ \hline 6x^3 & & +\ 3x & & \text{esta linea es } 3x(2x^2+1) \\ & -\ 4x^2 & & -\ 2 & \text{esta linea es } -2(2x^2+1) \\ \hline 6x^3 & -\ 4x^2 & +\ 3x & -\ 2 & \text{suma de las dos anteriores} \end{array}$$

c.
$$\begin{aligned}(x-a)(x+a) &= (x-a)(x)+(x-a)(a) = && \text{distributiva}\\ &= x^2-ax+ax-a^2 = && \text{distributiva}\\ &= x^2-a^2 && \text{agrupar terminos}\end{aligned}$$

---

Para multiplicar dos polinomios que tienen tres o más términos, usamos las mismas reglas que para el producto de monomios y binomios, esto es, cada término de un polinomio debe ser multiplicado por cada término del otro.

## Ejemplo 8 ■ Multiplicación de polinomios

Hallar el producto de los polinomios $(2x+3)(x^2-x+1)$ aplicando la propiedad distributiva y la multiplicación vertical.

***Solución***

**multiplicación horizontal**

$$\begin{array}{rlll} (2x+3)(x^2-x+1) & = 2x(x^2-x+1)+3(x^2-x+1) & = & \text{propiedad distributiva} \\ & = 2x\cdot x^2-2x\cdot x+2x\cdot 1+3\cdot x^2-3\cdot x+3\cdot 1 & = & \text{propiedad distributiva} \\ & = 2x^3-2x^2+2x+3x^2-3x+3 & = & \text{leyes de los exponentes} \\ & = 2x^3+x^2-x+3 & & \text{agrupamos los terminos semejantes} \end{array}$$

**multiplicación vertical**

La idea es similar a multiplicar un número de dos dígitos por otro de tres

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} & & & x^2 & - & x & + & 1 & \\ & & & & & 2x & + & 3 & \\ \hline & 2x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & & & \text{esta linea es } 2x\cdot(x^2-x+1) \\ + & & & 3x^2 & - & 3x & + & 3 & \text{esta linea es } 3\cdot(x^2-x+1) \\ \hline & 2x^3 & + & x^2 & - & x & + & 3 & \text{suma de los dos anteriores} \end{array}$$

---

El proceso contrario a la propiedad distributiva se llama **sacar factor común,** que desarrollaremos en el siguiente capítulo, por ejemplo

$$xy-3x^2=x(y-3x)$$

Podemos escribir los polinomios en **forma exponencial**, como mostramos en el siguiente ejemplo, usamos las propiedades del álgebra para simplificar estas expresiones.

## Ejemplo 9 ■ Multiplicación de polinomios

Desarrollar $(x-3)^3$

***Solución***

$$\begin{array}{rlll} (x-3)^3 & = (x-3)(x-3)(x-3) & = & \text{escribimos cada factor} \\ & = [(x-3)(x-3)](x-3) & = & \text{asociativa de la multiplicacion} \\ & = (x^2-3x-3x+9)(x-3) & = & \text{multiplicar } (x-3)(x-3) \\ & = (x^2-6x+9)(x-3) & = & \text{agrupamos los terminos semejantes} \\ & = x^2(x-3)-6x(x-3)+9(x-3) & = & \text{distributiva} \\ & = x^3-3x^2-6x^2+18x+9x-27 & = & \text{distributiva} \\ & = x^3-9x^2+27x-27 & & \text{agrupar terminos} \end{array}$$

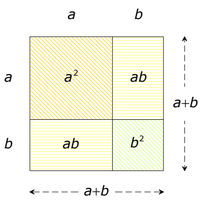
---

## Ejemplo 10 ■ Cuadrado de un binomio geométricamente

El cuadrado de un binomio también se puede demostrar geométricamente.

Consideramos un cuadrado de lado $a+b$, el área total incluye un cuadrado de área $a^2$, dos rectángulos de área $ab$ cada uno y un cuadrado de área $b^2$. Luego el área total es:

$$a^2+2ab+b^2$$




---

## ☐ Productos notables

Algunos productos de binomios aparecen en álgebra con cierta frecuencia. Por ejemplo, el producto $(x+3)(x-3)$ se llama producto de la suma y diferencia de dos términos. En este producto el término medio se anula.

$$\begin{aligned}(x+3)(x-3) &= x^2-3x+3x-9 = \\ &= x^2-9\end{aligned}$$

Otro producto notable es el cuadrado de un binomio. En este producto el término medio es el doble de los términos del binomio.

| | | |
|---|---|---|
| $(2x+3)(2x+3)$ | $= (2x+3)(2x+3) =$ | cuadrado de un binomio |
| | $= 4x^2+6x+6x+9 =$ | productos exteriores e interiores iguales |
| | $= 4x^2+12x+9$ | termino del medio es el doble |

***Algunos productos notables*** ($x$, $a$, $b$, $c$ y $d$ son números reales)

*Diferencia de cuadrados*

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

*Cuadrados de binomios o cuadrados perfectos*

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2 \qquad (x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

*Trinomios diversos*

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \qquad (x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$$

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

*Cubos de binomios o cubos perfectos*

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 \qquad (x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$

*Diferencia de dos cubos*

$$(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$$

*Suma de dos cubos*

$$(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$$

### Ejemplo 11 ■ Aplicar productos notables

Multiplicar los polinomios

**a.** $(2x-3)(2x+3)$ **b.** $(3x-5)^2$ **c.** $[(a-2)+b]^2$

***Solución***

**a.**

| | | |
|---|---|---|
| $(2x-3)(2x+3)$ | $= (2x)^2-3^2 =$ | producto notable |
| | $= 4x^2-9$ | simplificar |

**b.**

| | | |
|---|---|---|
| $(3x-5)^2$ | $= (3x)^2-2(3x)(5)+5^2 =$ | producto notable |
| | $= 9x^2-30x+25$ | simplificar |

**c.**

| | | |
|---|---|---|
| $[(a-2)+b]^2$ | $= (a-2)^2+2(a-2)b+b^2 =$ | producto notable |
| | $= a^2-4a+4+2ab-4b+b^2$ | simplificar |

## ☐ División de polinomios

La **división de monomios** se basa en el cociente de números y variables y en las propiedades de las potencias. El cociente de monomios no siempre es un monomio.

$$\frac{-3ab^2c^3}{4bc^2}=-\frac{3}{4}ab^{2-1}c^{3-2}=-\frac{3}{4}abc \qquad \frac{6xy^2}{3x^2y}=2\frac{y}{x}$$

es un monomio — no es un monomio

La **división de un polinomio por un monomio** se obtiene dividiendo cada término del polinomio por el monomio. La división tiene que ser posible.

$$\frac{4x^5+2x^3+6x}{2x}=2x^4+x^2+3 \qquad \frac{x^4y+x^3y^2}{x^4y^2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$$

es un polinomio — no es un polinomio

El procedimiento para la **división de polinomios** es similar al usado para dividir dos enteros. En el ejemplo siguiente vamos a recordarlo con el siguiente ejemplo:

## Ejemplo 12 Como dividir Polinomios

Antes de dividir, se ordenan los polinomios. Luego se aplica la regla de la división, teniendo en cuenta que es la operación inversa de la multiplicación.

$$\frac{2x^3-3x^2+x-1}{x^2+1} \qquad \frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ 2x^3-3x^2+x-1 & x^2+1 \\ \hline & \text{cociente} \end{array}$$

Para obtener el **primer término del cociente** se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ x & -\ 1 & x^2+1 \\ \cline{5-5} & & & & 2x \end{array} \qquad 2x=\frac{2x^3}{x^2} \quad \text{1º termino cociente}$$

El primer término del cociente se multiplica por todos los términos del divisor. El producto obtenido se resta del dividendo.

$$\begin{array}{lrrrr|l} & 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ x & -\ 1 & x^2+1 \\ \cline{6-6} -2x(x^2+1) & -\ 2x^3 & & -\ 2x & & 2x \\ \cline{2-5} \text{primer resto} & 0 & -\ 3x^2 & -\ x & -\ 1 & \end{array}$$

El primer término del resto obtenido se divide entre el primer término del dividendo. Se obtiene así el **segundo término del cociente**.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ x & -\ 1 & x^2+1 \\ \cline{5-5} -\ 2x^3 & & -\ 2x & & 2x-3 \\ \cline{1-4} & -\ 3x^2 & -\ x & -\ 1 & \end{array} \qquad -3=\frac{-3x^2}{x^2} \quad \text{2º termino cociente}$$

El segundo término del cociente se multiplica por todos los términos del divisor. El producto obtenido se resta del primer resto, obteniendo así el segundo resto (*en nuestro ejemplo, el resto final*), con el que se procede como anteriormente con el primer término del resto.

$$\begin{array}{lrrrr|l} & 2x^3 & -\ 3x^2 & +\ x & -\ 1 & x^2+1 \\ \cline{6-6} & -\ 2x^3 & & -\ 2x & & 2x-3 \\ \cline{2-5} & & -\ 3x^2 & -\ x & -\ 1 & \\ -(-3)(x^2+1) & & 3x^2 & & +\ 3 & \\ \cline{2-5} \text{segundo resto} & & & -\ x & +\ 2 & \end{array}$$

Repitiendo las operaciones anteriores con los demás términos, restos y cocientes se llega la **último término del cociente**. La multiplicación termina cuando el grado del resto parcial es menor que el grado del divisor. Se verifica además:

- ***Dividendo = (divisor · cociente) + resto***
- ***Grado del resto < grado del divisor***

## Ejemplo 13 División de Polinomios

Calcular $(x^4-x+1)\div(x^2+x+1)$

***Solución***

*Como el dividendo es un* ***polinomio no completo****, dejamos los espacios de los términos que faltan o completamos el polinomio agregándole los términos que faltan con coeficiente nulo.*

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +\ 0x^3 & +\ 0x^2 & -\ x & +\ 1 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6} -\ x^4 & -\ x^3 & -\ x^2 & & & x^2-x \\ \cline{1-5} 0 & -\ x^3 & -\ x^2 & -\ x & +\ 1 & \\ & x^3 & +\ x^2 & +\ x & & \\ \cline{1-5} & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

luego $$(x^4-x+1)=(x^2+x+1)(x^2-x)+1$$

### División de un polinomio por $x-a$

El caso más importante de división algebraica de polinomios de una variable es aquel en que el divisor es de primer grado. Utilizamos la regla de Ruffini o ley de cocientes.

*Ley de* ***Ruffini:***

*Se escriben en fila los coeficientes del* ***polinomio dividendo****, teniendo buen cuidado de situar ceros en los lugares de los términos que falten y estando el polinomio en orden decreciente respecto del grado.*

*El primer coeficiente del cociente es igual al primero del dividendo; el segundo del cociente se obtiene multiplicando por* ***a*** *el anterior y sumándole el segundo del dividendo, etc.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
| $a$ | | $c_4\cdot a$ | $c_3\cdot a$ | $c_2\cdot a$ | $c_1\cdot a$ | $c_0\cdot a$ |
| | $a_5=c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ | $c_0$ | $R$ |

*En general el coeficiente que ocupa el lugar* ***h*** *en el cociente se obtiene multiplicando el anterior por* ***a****, y sumando el que ocupa el lugar* ***h*** *en el dividendo. Operamos hasta llegar al último que se denomina resto.*

## Ejemplo 14 División de un Polinomio por $x - a$

Dividir el polinomio $x^7 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 5$ por $x - 1$

***Solución***

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{array}$$

luego $$x^7 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 5 = (x-1)(x^6 + x^5 - x^4 - x - 1) + 4$$

---

**Teorema del Resto:**

*El resto de la división del polinomio $P(x)$ por $x - a$, es el valor $P(a)$ que toma el polinomio para $x = a$.*

## Ejemplo 15 Teorema del resto

En el ejemplo anterior $P(x) = x^7 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 5$ y el valor del polinomio en $x = 1$ es $P(1) = 1^7 - 2 \cdot 1^5 + 1^4 - 1^2 + 5 = 4$ es decir, $P(1) = 4 = R$ como ya sabíamos.

---

### Divisores y múltiplos de polinomios

La **división** puede ser **exacta** (si el cociente es un polinomio entero) o **inexacta** (no lo es). En el primer caso decimos que el dividendo es **divisible** por el divisor. Luego

*La condición necesaria y suficiente para que un polinomio $P(x)$ sea **divisible** por $x - a$ es que se anule cuando $x = a$.*

## Ejemplo 16 Divisores y múltiplos de Polinomios

Dividir el polinomio $x^4 - 2x^2 + x + 2$ por $x + 1$

***Solución***

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

luego $x^4 - 2x^2 + x + 2 = (x+1)(x^3 - x^2 - x + 2)$; La división es exacta, y decimos que $x + 1$ es **divisor** de $x^4 - 2x^2 + x + 2$ o que $x^4 - 2x^2 + x + 2$ *es **múltiplo** de* $x + 1$.

---

## Ejemplo 17 Divisores y múltiplos de Polinomios

Halla el número *a* para que $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 4$ sea divisible por $(x + 2)$

***Solución***

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & a & 4 \\ -2 & & -2 & -8 & -2a+16 \\ \hline & 1 & 4 & a-8 & -2a+20 \end{array}$$

luego

$$-2a + 20 = 0 \qquad a = 10$$

*También*

para que sea divisible por $(x + 2)$ se tiene que cumplir que $P(-2) = 0$, luego

$$\begin{array}{rcll} P(-2) & = & x^3 + 6x^2 + ax + 4 & = \\ & = & (-2)^3 + 6(-2)^2 + a(-2) + 4 & = \\ & = & -8 + 24 - 2a + 4 & = \\ & = & 20 - 2a & = 0 \end{array}$$

Luego

$$a = 10$$

---

# Aa.5e Ejercicios

**1.** Escribir los polinomios en forma decreciente y encontrar el grado y el coeficiente principal de cada uno:

*a.* $2x-3$ *b.* $x^2-1$ *c.* $5-3y^2$ *d.* $7t-2t^2$

*e.* $5x-x^2+1$ *f.* $10-t+t^3+t^2$ *g.* $y+5-y^2$ *h.* $7t+5-t^2$

**2.** Realizar las siguientes operaciones:

*a.* $(x^4-x-3)+(x+2)$ *b.* $(-3x^2+x+3)-(x-2)$ *c.* $(-x^2+3)+(x^2+2x-3)$

*d.* $3x^2-3\left[5x-(x^2+x)\right]$ *e.* $x^2-3\left[x+(x^2-x+1)\right]$ *f.* $(x^3+x+2)-(x^2-2x)$

*g.* $(2x^2-x-3)-\left[(x^2-2x)-(3x^2-4x+5)\right]$ *h.* $\left[5(x^3+1)-(3x^3+x-1)\right]+2(x^2-9x+2)$

**3.** Realizar las siguientes multiplicaciones y simplificar

*a.* $(-3a)(-2a^3)$ *b.* $(3n^2)(6n)$ *c.* $(2y)(5-y)$ *d.* $(x+2)(-2x)$

*e.* $x^2(x^2+x-1)$ *f.* $(x+7)(x-5)$ *g.* $(x+7)(x+5)$ *h.* $(x-7)(x+7)$

*i.* $(2-3x)(2+3x)$ *j.* $(-5+x)(5+x)$ *k.* $(b^3-1)(1-b^4)$ *l.* $(1-\frac{3}{4}x)(1-x)$

**4.** Realizar las siguientes multiplicaciones (en forma horizontal o vertical) y simplificar cuanto sea posible:

*a.* $(2w-1)(2w-1)$ *b.* $6y(x-y)+3x(y-x)$ *c.* $(x^3-x^2+x-1)(x^2-x+1)$

*d.* $-3\left[x+(-1)^2\right]^2$ *e.* $\left[\frac{1}{x}-1\right]\left[x+1\right]$ *f.* $(r+1)\left[\frac{r^2}{2}+1\right]$

*g.* $\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]^2-\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2$ *h.* $\left[ax-\frac{1}{2}\right]^3\left[2ax+1\right]^2=$ *i.* $\left[ax-2\right]\left[\frac{x}{b}+3\right]^2=$

*j.* $\left[x-\frac{1}{3}\right]\left[x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right]$ *k.* $\left[\frac{1}{3}x+1\right]\left[x^2-3x+9\right]$ *l.* $\left[\frac{1}{3}x-1\right]\left[3x^2+x-1\right]$

*m.* $(5u+1)\left[u-\frac{1}{5}\right]$ *n.* $\left[\frac{1}{3}x-1\right]^3$ *o.* $\left[x+\frac{1}{3}\right]^3$

**5.** Sean $P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$ y $Q(x)=x^3-7x+6$. Hallar:

*a.* El producto de $P$ por $R$ *b.* El resto $R$ de la división de $P$ por $Q$.

**6.** Sean $P(x)=x^3-7x+6$ y $Q(x)=x^2-3x+2$. Comprobar que $P$ es múltiplo de $Q$.

**7.** Sean $P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$. Dividir $P$ por $(x-1)$ aplicando la regla de Ruffini.

**8.** Halla el número $u$ para que $x^3-7x+u$ sea múltiplo de $(x+3)$.

**9.** Realiza las siguientes operaciones:

*a.* $(3x^4+x^3-2x+3)\div(x^2-3x+2)$ *b.* $(x^3-2x+6)\div(x+4)$

**10.** Halla el número $a$ para que $x^3+6x^2+ax+4$ sea divisible por $(x+2)$.

**11.** Realizar las siguientes multiplicaciones:

*a.* $(x-1)(x+1)$ *b.* $(x-1)(x^2+x+1)$ *c.* $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

A la vista de los resultados anteriores, ¿Cuál es el resultado de: $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

**12.** Hallar el valor de $\boldsymbol{m}$ para que $x^4+mx^2-5x+1$ sea divisible por $(x-1)$.

**13.** La ecuación $x^3+3x^2+px+3p$ tiene dos raíces cuya suma es cero. Determinar $\boldsymbol{p}$ y hallar las raíces.

**14.** Determinar $\boldsymbol{p}$ real para que $2p^2x^3+3px^2-2$ sea divisible por $(x-1)$ y tenga solo raíces reales.

# Aa.6 Factorización de Polinomios

Factorizar ecuaciones algebraicas es lo contrario de multiplicar polinomios. Factorizar una ecuación algebraica puede ser de gran ayuda para encontrar las soluciones de la ecuación.

**Ejemplo 1** Encontrar las soluciones de una ecuación

Encontrar los números reales que satisfagan la ecuación algebraica:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

***Solución***

Como vimos en el anterior apéndice, es un cuadrado perfecto, luego

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$$

resolviendo el cuadrado

$$x = 1$$

---

La operación de convertir la expresión $x^2 - 2x + 1 = 0$ en un producto de dos factores, la llamamos factorizar la expresión algebraica.

No todas las expresiones algebraicas pueden ser factorizadas, y el proceso no siempre es sencillo, vamos a presentar estrategias que pueden ayudarnos a factorizar estas expresiones.

## ☐ Sacar factor común

En ocasiones, todos los términos de una expresión tienen un factor común. Extraer este factor de cada uno de los términos es lo que conocemos como **sacar factor común** (factorizar). Esta operación la podemos considerar como la opuesta de aplicar la propiedad distributiva.

$$\boxed{ab + ac = a(b+c)}$$

Un caso especial, es sacar factor común a $-1$,

$$\boxed{-a - b = -(a+b)}$$

Otro caso especial

$$\boxed{a - b = -(b-a)}$$

**Ejemplo 2** Sacar factor común

Factorizar las siguientes expresiones:

**a.** $x^{3/2} + x + \sqrt{x}$ **b.** $e^{2t} + e^t + e^{t\sin t}$ **c.** $y^3 - 2y^2 + y$

***Solución***

**a.**
$$\begin{aligned} x^{3/2} + x + \sqrt{x} &= \sqrt{x}(x) + \sqrt{x}\left[\sqrt{x}\right] + \sqrt{x}(1) = && \text{factor en cada termino} \\ &= \sqrt{x}\left[x + \sqrt{x} + 1\right] && \text{forma factorizada} \end{aligned}$$

**b.**
$$\begin{aligned} e^{2t} + e^t + e^{t\sin t} &= e^t(e^t) + e^t(1) + e^t(e^{\sin t}) = && \text{factor en cada termino} \\ &= e^t\left[e^t + 1 + e^{\sin t}\right] && \text{forma factorizada} \end{aligned}$$

**c.**
$$\begin{aligned} y^3 - 2y^2 + y &= y(y^2) - y(2y) + y(1) = && \text{factor en cada termino} \\ &= y(y^2 - 2y + 1) = && \text{forma factorizada} \\ &= y(y-1)^2 && \text{cuadrado perfecto} \end{aligned}$$

---

## Agrupar términos iguales

Muchas expresiones no tienen un factor común que se repita en todos sus términos, pero si en algunos de ellos. Puede sernos útil agrupar estos términos y extraer factor común de ellos.

**Ejemplo 3** Sacar factor común agrupando términos

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $5x^2(6x-5)-2(6x-5)$ b. $e^{2x}+x^2+2xe^x$

c. $x^3-5x^2+x-5$ d. $y(1+e^x)+y(1+e^x)e^x$

***Solución***

a. $5x^2(6x-5)-2(6x-5) = 5x^2(6x-5)-2(6x-5) =$ binomios iguales
$= (6x-5)(5x^2-2)$ sacar factor comun

b. $e^{2x}+x^2+2xe^x = (e^{2x}+xe^x)+(xe^x+x^2) =$ agrupar terminos
$= e^x(x+e^x)+x(x+e^x) =$ sacar factor comun en cada grupo
$= (x+e^x)(e^x+x) =$ sacar factor comun al binomio
$= (x+e^x)^2$ terminar

c. $x^3-5x^2+x-5 = (x^3-5x^2)+(x-5) =$ agrupar terminos
$= x^2(x-5)+1(x-5) =$ factor comun en cada grupo
$= (x-5)(x^2+1)$ forma factorizada

d. $y(1+e^x)+y(1+e^x)e^x = y\left[(1+e^x)+(1+e^x)e^x\right] =$ factor comun y
$= y\left[(1+e^x)(1+e^x)\right] =$ factor comun binomio
$= y(1+e^x)^2$ forma factorizada

## Buscar cuadrados completos

En el anterior apéndice, vimos dos casos notables que llamamos cuadrados completos:

| |
|---|
| $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ |
| $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ |

**Ejemplo 4** Sacar factor común por cuadrados completos

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $r^2-4r+4$ b. $x+2\sqrt{x}+1$ c. $2^{2x}+2^{x+1}+1$

***Solución***

a. $r^2-4r+4 = = (r)^2-2(r)(2)+(2)^2 =$ escribir el cuadrado de una diferencia
$= (r-2)^2$ forma factorizada

b. $x+2\sqrt{x}+1 = = \left[\sqrt{x}\right]^2+2\left[\sqrt{x}\right](1)+(1)^2 =$ escribir el cuadrado de una suma
$= \left[\sqrt{x}+1\right]^2$ forma factorizada

c. $2^{2x}+2^{x+1}+1 = = \left[2^x\right]^2+2\left[2^x\right](1)+(1)^2 =$ escribir el cuadrado de una suma
$= \left[2^x+1\right]^2$ forma factorizada

## ☐ Buscar la diferencia de cuadrados

En el anterior apéndice, vimos también la diferencia de cuadrados:

$$\underset{\text{diferencia}}{a^2 \uparrow - b^2} = \underbrace{(a+b)\ (a-b)}_{\text{signos opuestos}}$$

Ejemplo 5 ■ Sacar factor común por diferencia de cuadrados

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $r^2 - 64$

b. $-x^2 + 1$

c. $t^4 - 16$

d. $\sin^4 x - \cos^4 x$

**Solución**

a.
$$\begin{aligned} r^2 - 64 &= r^2 - 8^2 = && \text{escribir la diferencia de dos cuadrados}\\ &= (r+8)(r-8) && \text{forma factorizada} \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= 1^2 - x^2 = && \text{escribir la diferencia de dos cuadrados}\\ &= (1+x)(1-x) && \text{forma factorizada} \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} t^4 - 16 &= \left[t^2\right]^2 - 4^2 = && \text{escribir la diferencia de dos cuadrados}\\ &= (t^2+4)(t^2-4) = && \text{forma factorizada}\\ &= (t^2+4)(t+2)(t-2) && \text{repetimos en el segundo termino} \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} \sin^4 x - \cos^4 x &= \left[\sin^2 x\right]^2 - \left[\cos^2 x\right]^2 = && \text{escribir la diferencia de dos cuadrados}\\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = && \text{factorizar y como } \sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = && \text{volvemos a factorizar}\\ &= (\sin x)^2 - (\cos x)^2 = && \text{escribir la diferencia de dos cuadrados}\\ &= (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) && \text{forma factorizada} \end{aligned}$$

## ☐ Buscar la suma o diferencia de cubos

El último tipo de factorización que vemos es la suma y diferencia de dos cubos. El modelo para estas dos formas está resumido debajo. Prestamos especial atención a los signos de los términos.

| | |
|---|---|
| signos iguales: $a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 - ab + b^2)$ ; signos distintos | signos iguales: $a^3 - b^3 = (a-b)\ (a^2 + ab + b^2)$ ; signos distintos |

Ejemplo 6 ■ Sacar factor común por suma o diferencia de cubos

Factorizar las siguientes expresiones:

a. $x^3 - 125$

b. $8y^3 + 1$

c. $27x^3 - 64y^3$

**Solución**

a.
$$\begin{aligned} x^3 - 125 &= x^3 - 5^3 = && \text{escribir como diferencia de dos cubos}\\ &= (x-5)(x^2+5x+25) && \text{forma factorizada} \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 8y^3 + 1 &= (2y)^3 + 1^3 = && \text{escribir como suma de dos cubos}\\ &= (2y+1)\left[(2y)^2 - (2y)(1) + 1^2\right] = && \text{forma factorizada}\\ &= (2y+1)(4y^2 - 2y + 1) && \text{simplificar} \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 27x^3 - 64y^3 &= (3x)^3 - (4y)^3 = && \text{escribir como diferencia de dos cubos}\\ &= (3x-4y)\left[(3x)^2 + (3x)(4y) + (4y)^2\right] = && \text{forma factorizada}\\ &= (3x-4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2) && \text{simplificar} \end{aligned}$$

# Aa.6e Ejercicios

**1.** Factorizar las siguientes expresiones:

a. $9x^3y + 6xy^2$ b. $x - x\ln x$ c. $4uv + 6u^2v^2$

d. $x\sin x + x\cos x$ e. $Ae^{2t} + 2Ate^{2t} + At^2e^{2t}$ f. $p(p+q) - q(p+q)$

**2.** Factorizar las siguientes expresiones:

a. $2y(y-3) + 5(y-3)$ b. $a(a+6) + (2a-3)(a+6)$

c. $(5x+y)(x-y) - 5x(x-y)$ d. $y^3 - 6y^2 + 2y - 12$

e. $14x^3 + 21x^2 - 6x - 9$ f. $ab + 3a - 3b - 9$

g. $18a^2b^4 + 24a^2b^2 - 12a^2b$ h. $ab + 3a - 3b - 9$

**3.** Factorizar las diferencias de cuadrados siguientes:

a. $a^2 - 4$ b. $a^2b^2 - 9$ c. $b^2 - 144$

d. $a^8 - 49$ e. $(x-3)^2 - 4$ f. $x^2 - 4b^2$

g. $81 - (y+5)^2$ h. $(a+4)^2 - 49$ i. $(1-2t)^4 - w^2$

**4.** Factorizar las sumas o diferencias de cubos siguientes:

a. $x^3 - 8$ b. $y^3 + 125$ c. $8b^3 - 27$

d. $27a^3 + 64$ e. $(x-3)^3 - 1$ f. $x^3 - b^3$

g. $27 - (x+2)^3$ h. $(a+3)^3 - 27$ i. $(1-2x)^3 + x^3$

**5.** Factorizar los siguientes polinomios:

a. $50x^2 - 8$ b. $3y^2 - 192$ c. $b^3 - 144b$

d. $a^3 - 16a$ e. $b^4 - 16$ f. $a^4 - 625$

g. $y^4 - 81x^4$ h. $u^4 - 256v^4$ i. $7a^3 + 56$

**6.** Factorizar las siguientes expresiones ( $n > 0$ ):

a. $4x^{2n} - 25$ b. $81 - 16y^{4n}$ c. $x^{2n} - y^{2n}$

**7.** Factorizar las siguientes expresiones de dos maneras distintas:

d. $3x^3 + 4x^2 - 3x - 4$ e. $6x^3 - 8x^2 + 9x - 12$ f. $3x^3 - x^2 - 12x + 4$

# Aa.7 Ecuación cuadrática

## Completar el cuadrado

Otro ejemplo de cambio en la forma de una expresión es la conversión de

$$ax^2 + bx + c$$

en la forma

$$a(x+k)^2 + d$$

Este método produce un cuadrado perfecto dentro de una expresión cuadrática. Un cuadrado perfecto es una expresión de la forma

$$(x+n)^2 = x^2 + 2nx + n^2$$

para algún $n$. Para completar el cuadrado en la expresión, debemos encontrar en primer lugar $n$, que es la mitad del coeficiente de $x$. Antes de dar el procedimiento general vamos a ver un ejemplo.

### Ejemplo 1 — Completar el cuadrado ( $a = 1$ )

Escribir $x^2 - 10x + 9$ en la forma $a(x+k)^2 + d$ .

**Solución**

1º: Dividimos el coeficiente de $x$ por 2, $\frac{1}{2}(-10) = -5$

2º: Elevamos al cuadrado el resultado anterior $(-5)^2 = 25$

3º: Sumamos y restamos 25 después del último término $x$:

$$x^2 - 10x + 9 = x^2 - 10x + (25 - 25) + 9 =$$

$$= \underbrace{(x^2 - 10x + 25)}_{\text{cuadrado perfecto}} - 25 + 9 =$$

4º: Factorizamos el cuadrado perfecto y sumamos los términos constantes

$$x^2 - 10x + 9 = (x-5)^2 - 16$$

---

### Ejemplo 2 — Completar el cuadrado ( $a \neq 1$ )

Escribir $3x^2 + 6x - 9$ en la forma $a(x+k)^2 + d$ .

**Solución**

Cuando $a \neq 1$ , factorizamos el coeficiente y seguimos los mismos pasos que en el Ejemplo 1.

$$3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$$

ahora completamos el cuadrado en la expresión $x^2 + 2x - 3$

1º: Dividimos el coeficiente de $x$ por 2, $\frac{1}{2}(2) = 1$

2º: Elevamos al cuadrado el resultado anterior $(1)^2 = 1$

3º: Sumamos y restamos 1 después del último término $x$:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + (1 - 1) - 3 =$$

$$= \underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{\text{cuadrado perfecto}} - 1 - 3 =$$

Factorizamos el cuadrado perfecto y simplificamos el resto

$$x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$$

Por último, completamos el cuadrado multiplicando por 3

$$3x^2 + 6x - 9 = 3(x+1)^2 - 12$$

---

# ☐ Ecuación cuadrática

Para hallar las raíces de la **ecuación cuadrática** completamos el cuadrado ( $a \neq 0$ ) en la expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

## completar el cuadrado

Queremos expresar $\qquad ax^2 + bx + c = a(x+k)^2 + d$

desarrollando $\qquad ax^2 + bx + c = ax^2 + 2akx + ak^2 + d$

luego

$$\boxed{k = \frac{b}{2a}} \qquad \boxed{d = c - \frac{b^2}{4a}}$$

entonces

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad \textit{escribimos como} \quad \boxed{a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0}$$

## resolver la ecuación

operando

$$a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

$$a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2}{4a} - c \qquad c - \frac{b^2}{4a} \text{ al otro lado de la igualdad}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ y multiplicamos a ambos lados por } \frac{1}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{hacemos la raiz cuadrada}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{restamos a ambos lados } \frac{b}{2a}$$

y entonces

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

que tiene dos raíces

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Cuando $a$, $b$ y $c$ son reales y $b^2 - 4ac \geq 0$ , las raíces de la ecuación son reales y si

| | | |
|---|---|---|
| 1. $b^2 - 4ac > 0$ | *Las dos raíces son distintas* | $x_1 \neq x_2$ |
| 2. $b^2 - 4ac = 0$ | *Las dos raíces coinciden* | $x_1 = x_2$ |

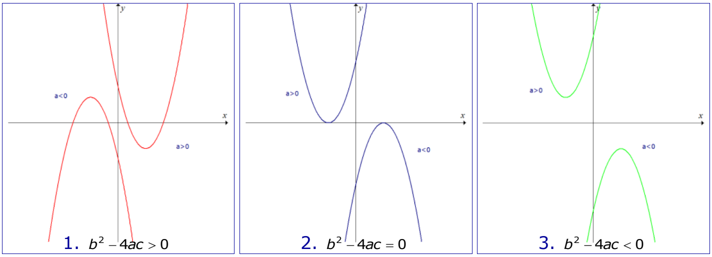
Si

| | |
|---|---|
| 3. $b^2 - 4ac < 0$ | *La ecuación no tiene raíces reales (las raíces son complejas)* |

Como los cuadrados de los números reales son siempre positivos, fue necesario inventar los **números complejos** para este propósito, estos, son expresados en función de un número ***imaginario i*** que satisface que, $i^2 = -1$ .

Los tres casos que hemos visto antes (1. $b^2 - 4ac > 0$, 2. $b^2 - 4ac = 0$ y 3. $b^2 - 4ac < 0$) corresponden al número de veces que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta al eje $x$ (2, 1 o 0 ). Estudiaremos más adelante la representación de cualquier ecuación cuadrática.

**Representación gráfica** de $y = ax^2 + bx + c$ según los valores del discriminante $b^2 - 4ac$



## Ecuación cuadrática (otra manera)

En $$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

si multiplicamos la igualdad por $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

completamos el cuadrado observando que $4abx$ es el doble de $2ax$ por $b$

$$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$$

Donde al número

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

se le llama **discriminante** de la ecuación y la naturaleza de las raíces depende de $\Delta$.

Como suma por diferencia es diferencia de cuadrados y $\left[\sqrt{\Delta}\right]^2 = \Delta$ , entonces

$$(2ax + b + \sqrt{\Delta}) \cdot (2ax + b - \sqrt{\Delta}) = 0$$

luego las soluciones son

$$\boxed{2ax + b + \sqrt{\Delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$\boxed{2ax + b - \sqrt{\Delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

y la solución de la ecuación de segundo grado

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Observamos que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Por lo tanto la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

la podemos escribir

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad a \neq 0$$

y si $x_1$ y $x_2$ son sus soluciones, entonces

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0}$$

## Ejemplo 3 ■ Raíces de una ecuación de segundo grado

Hallar las raíces de la ecuación $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$.

***Solución***

Multiplicamos por $-2$ a ambos lados de la igualdad

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Y las soluciones de la ecuación son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

luego

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 4)$$

*Si completamos el cuadrado*

$$-\frac{1}{2}\left[x^2 + 2x - 8\right] = -\frac{1}{2}\left[(x+1)^2 - 9\right] = -\frac{1}{2}\left[(x+1)^2 - (3)^2\right] = -\frac{1}{2}(x + 1 + 3)(x + 1 - 3) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$$

# Aa.7e Ejercicios

**1.** Completar el cuadrado de cada una de las siguientes expresiones:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $x^2+8x$ | b. | $y^2-12y$ | c. | $u^2+5u$ | d. | $x^2-8x$ |
| e. | $y^2+12y$ | f. | $u^2-5u$ | g. | $2x^2-20x$ | h. | $x^2+6x-8$ |
| i. | $p^2+4p-3$ | j. | $x^2+4x-3$ | k. | $-16x^2+6x$ | l. | $x^2+x+1$ |
| m. | $3x^2-12x+13$ | n. | $\pi x^2-2\pi x$ | o. | $t^2-2t$ | p. | $ax^2+ax+b$ |

**2.** Resolver las siguientes ecuaciones completando el cuadrado:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $r^2-6r=-8$ | b. | $p^2-2p=6$ | c. | $n^2=3n+18$ | d. | $2s^2=1-10s$ |
| e. | $x^2-x=2$ | f. | $5p^2+9p=1$ | g. | $24(-x^2-3x+1)$ | h. | $-2p^2+5p-4$ |

**3.** Resolver las siguientes ecuaciones usando la fórmula cuadrática:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $2q^2+5q=-2$ | b. | $p^2+p=1$ | c. | $n^2+n=4$ | d. | $2s^2=1-10s$ |
| e. | $x^2+x=2$ | f. | $5p^2+9p=1$ | g. | $6p^2-7p+2=0$ | h. | $1200s^2=10s+1$ |
| i. | $x(x-3)=x-6$ | j. | $x^2=7(x-1)+3$ | k. | $x^2+2bx=c^2$ | l. | $x^2+2cx-c^2=0$ |

**4.** En los siguientes ejercicios, resolver factorizando, completando el cuadrado o usando la fórmula cuadrática.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a. | $2r^2-2r=8$ | b. | $-3p^2+4p+9=0$ | c. | $n^3+2n^2=3n+6$ |
| d. | $25s^2=30s-4$ | e. | $2x^3+24=6x^2+8x$ | f. | $49p^2+70p+22=0$ |
| g. | $x^2-x=8$ | h. | $p^2-4p-9=0$ | i. | $n^2-2n-3n+6=0$ |

**5.** Determinar el valor de $k$ para que las siguientes ecuaciones tengan raíces reales.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. | $5x^2-4x-(5+k)=0$ | b. | $x^2+3-k(2x-2)=0$ |
| c. | $x^2-(3k+2)x+7=0$ | d. | $(k+2)x^2+5kx-2=0$ |
| e. | $(k-1)x^2+2x+(k+1)=0$ | f. | $(k+2)x^2+3x+(k+3)=0$ |

**6.** En las siguientes cuestiones expresar las expresiones dadas de alguna de las siguientes maneras:

$$\sqrt{(px+q)^2+m^2} \qquad \sqrt{(px+q)^2-m^2} \qquad \sqrt{m^2-(px+q)^2}$$

***Ejemplo:***

$$\sqrt{-4x^2+x}=\sqrt{\left[\frac{1}{4}\right]^2-\left[2x-\frac{1}{4}\right]^2} \quad \text{ya que:}$$

$$\begin{aligned}
-4x^2+x &= -(4x^2-x) && \text{sacamos factor comun a -1}\\
&= -\left[(2x)^2-2\left[\frac{1}{4}\right](2x)+\left[\frac{1}{4}\right]^2-\left[\frac{1}{4}\right]^2\right] && \tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{2\cdot 2}\\
&= -\left[\left[2x-\frac{1}{4}\right]^2-\left[\frac{1}{4}\right]^2\right] && \text{completamos el cuadrado}\\
&= \left[\frac{1}{4}\right]^2-\left[2x-\frac{1}{4}\right]^2
\end{aligned}$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. | $\sqrt{x^2+3x+1}$ | b. | $\sqrt{x^2+3x}$ | c. | $\sqrt{2x^2-x}$ | d. | $\sqrt{x-2x^2}$ |
| e. | $\sqrt{-x^2+x+1}$ | f. | $\sqrt{x^2-x+1}$ | g. | $\sqrt{x^2+x-1}$ | h. | $\sqrt{x^2+x+1}$ |
| i. | $\sqrt{6x^2-4x}$ | j. | $\sqrt{9x-4x^2}$ | k. | $\sqrt{-x^2-x}$ | l. | $\sqrt{-x^2-x-1}$ |

# Aa.8 Fracciones racionales

## Fracción algebraica

### Definición de Fracción algebraica:

Si $P$ y $Q$ son polinomios en $x$ y $Q \neq 0$, llamamos **fracción algebraica** a:

$$\frac{P}{Q}$$

Las fracciones algebraicas se comportan en muchos sentidos como las fracciones numéricas. Vamos a simplificarlas, sumarlas, multiplicarlas y dividirlas.

### Fracciones *(recordamos)*

Para **sumar** fracciones con el **mismo denominador**, usamos la propiedad distributiva:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{1}{b}a+\frac{1}{b}c=\frac{1}{b}(a+c)=\frac{a+c}{b}$$

luego

$$\boxed{\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}$$

un error común $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b}+\frac{a}{c}$

Para **sumar** fracciones con el **distinto denominador**, usamos el común denominador:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

La diferencia $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

Para **multiplicar** fracciones

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

particularmente $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$

Para **dividir** fracciones, las invertimos y multiplicamos

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}}$$

es cierto $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$ | $\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{ac}{b}$

### Simplificación de Fracciones

Una fracción algebraica está **reducida a sus términos más simples,** o **simplificada**, cuando el numerador y el denominador no tienen más factor en común que la unidad.

Reducimos una expresión racional a su mínima expresión factorizando de manera completa el numerador y el denominador y cancelando todos su factores comunes.

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b} \qquad b \neq 0,\ c \neq 0$$

**Ejemplo 1** — Simplificar fracciones

Reducir cada expresión racional a su mínima expresión:

**a.** $\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$ **b.** $\frac{x^3-8}{x^3-2x^3}$ **c.** $\frac{2-2x}{x^2-3x+2}$

***Solución***

**a.** $\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x+2)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\frac{(x+2)}{(x+1)}, \quad x \neq -2,-1$

**b.** $\frac{x^3-8}{x^3-2x^3}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{x^2\cancel{(x-2)}}=\frac{x^2+2x+4}{x^2}, \quad x \neq 0,2$

**c.** $\frac{2-2x}{x^2-3x+2}=\frac{2(-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=\frac{-2}{x-2}, \quad x \neq 1,2$

### Fracciones equivalentes

$$\frac{P}{Q} \quad \text{y} \quad \frac{P'}{Q'}$$

son **equivalentes** si $P \cdot Q' = Q \cdot P'$ .

También, son equivalentes si una de ellas se ha obtenido **simplificando** la otra, o bien si ambas, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción. (**simplificamos** una fracción dividiendo el numerador y el denominador por un mismo polinomio).

**Ejemplo 2** ■ Fracciones equivalentes

Comprobar si las fracciones

$$\frac{x-2}{x^2+x-6} \quad \text{y} \quad \frac{x}{x^2+3x}$$

son equivalentes

***Solución***

Como

$$(x-2)(x^2+3x) = x(x^2+3x)$$

las fracciones son equivalentes. También si las simplificamos

$$\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \qquad \frac{x}{x^2+3x} = \frac{x}{x(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

vemos que dan origen a la misma fracción, luego son equivalentes.

## Operaciones con fracciones

### Suma y resta de fracciones

Si las fracciones tienen el mismo numerador, se escribe ese denominador y tendremos como numerador la suma (o resta) de las fracciones dadas.

Si las fracciones tienen distinto denominador, se reduce a común denominador y se suman los numeradores. De análoga manera se efectúa la resta.

**Ejemplo 3** ■ Suma y resta

Resolver y simplificar cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$ b. $\frac{(x+h)^2}{h} - \frac{x}{h}$

c. $\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ d. $\frac{x+1}{x^2+5x+6} + \frac{x+2}{x^2+4x+3}$

***Solución***

a. $$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$$

b. $$\frac{(x+h)^2}{h} - \frac{x}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x}{h} = \frac{x^2+(2h-1)x+h^2}{h}$$

c. $$\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{\left[\sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x}\right]+(x+1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{x+x^2+2x+1}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{x^2+3x+1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

d. $$\frac{x+1}{x^2+5x+6} + \frac{x+2}{x^2+4x+3} = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} + \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x+1)^2+(x+2)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

en este último caso, hemos hecho el mínimo común múltiplo de los denominadores que es $(x+1)(x+2)(x+3)$ , más sencillo que el máximo común divisor $(x+1)(x+2)(x+2)(x+3)$

### Producto de fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones se escribe como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores. Si es posible se factorizan numeradores y denominadores y se simplifican los factores primos comunes.

## Ejemplo 4 ■ Producto

Resolver y simplificar cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\dfrac{2x}{x+1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$

b. $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+x}\cdot\dfrac{\sin x+\cos x}{1-x}$

c. $\dfrac{4x^2+12x+9}{x^2}\cdot\dfrac{x}{4x+6}$

d. $\dfrac{1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x}$

***Solución***

a. $\dfrac{2x}{x+1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}=\dfrac{2x\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{2x^{3/2}}{x^2+3x+2}$

b. $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+x}\cdot\dfrac{\sin x+\cos x}{1-x}=\dfrac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}{1-x^2}$

c. $\dfrac{4x^2+12x+9}{x^2}\cdot\dfrac{x}{4x+6}=\dfrac{(2x+3)^2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{2(x+3)}=\dfrac{2x+3}{2x}$

d. $\dfrac{1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x}=\dfrac{1}{x+3}\cdot\dfrac{(x+3)(x-3)}{x}=\dfrac{x-3}{x}$

---

### Cociente de fracciones

El cociente entre dos fracciones es la fracción que resulta al multiplicar al dividendo por la fracción recíproca del divisor.

## Ejemplo 5 ■ Cociente de fracciones

Resolver y simplificar cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $\dfrac{\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+2}}$

b. $\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}}}{\dfrac{1+x}{1-x^2}}$

c. $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{4}}{x^2}\div\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{x}$

d. $(2x^2-1)\div\dfrac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}$

***Solución***

a. $\dfrac{\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+2}}=\dfrac{2x}{x+1}\dfrac{x+2}{x}=2\dfrac{x+2}{x+1}$

b. $\dfrac{\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}}}{\dfrac{1+x}{1-x^2}}=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}}\cdot\dfrac{(1+x)(1-x)}{1+x}=\dfrac{2x(1-x)}{\sqrt{1+x}}$

c. $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{4}}{x^2}\div\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{x}=\dfrac{\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\left[x-\dfrac{1}{2}\right]}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{x}$

d. $(2x^2-1)\div\dfrac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}=\left[\sqrt{2}x+1\right]\left[\sqrt{2}x-1\right]\cdot\dfrac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}=\left[\sqrt{2}x-1\right]^2$

---

# Aa.8e Ejercicios

**1.** Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

a. $\dfrac{3x-6}{5x}\cdot\dfrac{x^2-x+6}{x^2-4}$

b. $\dfrac{9x-25}{2x-2}\cdot\dfrac{1-x^2}{6x-10}$

c. $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x}$

d. $\dfrac{12}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2-1}{4x-2}$

e. $\dfrac{x+7}{x}+\dfrac{x+2}{x^2+x}-\dfrac{2x-1}{x+1}$

f. $\dfrac{4x^2-1}{x^2-16}\cdot\dfrac{x^2-4x}{2x+1}$

g. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

h. $\dfrac{x^3-x}{x^2-2xy+y^2}\,\dfrac{x^4-y^4}{4xy+4y-4x-4}\,\dfrac{4y-4}{x^2+y^2}$

**2.** Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado:

a. $\dfrac{x}{x^2-7x+6}-\dfrac{x}{x^2-2x-24}$

b. $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+1}{x^2+5x-24}$

c. $\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{2}{x^2+x-6}$

d. $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{x-4}{x^2-2x+1}$

e. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

f. $\dfrac{x-1}{2(x-3)}+\dfrac{x^2-6x}{6x-18}-\dfrac{x}{6(3-x)}$

**3.** Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado:

a. $\dfrac{x^3-8x^2+16x}{3x^3-12x^2}\div\dfrac{x^2-16}{6x}$

b. $\dfrac{1-\dfrac{x}{x+1}}{2-\dfrac{x-1}{x}}$

c. $\dfrac{\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x}}{a}$

d. $\dfrac{3-\dfrac{x^2}{x+1}}{1+\dfrac{x}{x^2-1}}$

e. $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}$

f. $\dfrac{3x-\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{(x-1)^2}-1}$

g. $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{4}}{x^2}\div\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{x}$

h. $\left[2x^2-1\right]\div\dfrac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}$

i. $\dfrac{x^2-\dfrac{1}{4}}{x^2}-\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{x}$

j. $\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{x^2}}$

k. $\dfrac{x}{(x-y)(z-x)}+\dfrac{y}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{z}{(y-z)(z-x)}$

# GEOMETRÍA

Estimado estudiante,

Soy **Pilar Salazar**, profesora de la asignatura de Laboratorio de Geometría y Forma en el Grado en Estudios de Arquitectura de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad de Navarra.

El objetivo de la asignatura que imparto es dotar al alumno del conocimiento gráfico científico de la forma a través del aprendizaje y aplicación de la geometría (métrica, descriptiva y sistemas de representación) y de las técnicas de dibujo arquitectónico. Estos contenidos suponen, además, la introducción a la expresión gráfica específica del oficio de arquitectura, atendiendo a su codificación y a la evolución de las convenciones y los instrumentos de representación arquitectónica.

La asignatura proporciona al alumno los conocimientos y habilidades necesarios para representar en un documento final las ideas, apuntes o croquis esquemáticos previos, así como para saber leer, interpretar y realizar un plano de arquitectura de manera precisa y completa.

Se partirá de la geometría básica, para llegar al conocimiento de elementos complejos que el alumno pueda utilizar en el diseño de objetos y de arquitectura. De manera simultánea, se establecerán las bases de los sistemas de representación y los conocimientos de métrica necesarios para el dibujo y comprensión de la arquitectura. Se profundizará en los sistemas de representación bidimensionales y tridimensionales: los sistemas diédrico, acotado, axonométrico y cónico, con el objetivo de aprender a ver, analizar y dibujar la realidad que rodea al alumno. Se representará dicha realidad a través de maquetas volumétricas que plasmen la geometría implícita. La asignatura ofrece una formación básica en las técnicas informáticas del dibujo y la geometría, y su transferencia al mundo físico a través del diseño asistido.

# Bb Cuestiones básicas Dibujo Técnico

# Bb.1 El papel

## Normalización

### Definición

Llamamos normalización al esfuerzo por obtener soluciones unificadas y sintetizadas, es el conjunto de documentos técnicos que se han ido elaborando a lo largo del tiempo. La normalización consigue producir más y mejor, a través de la reducción de tiempos y costos. Es el lenguaje común en que se habla en un ámbito profesional. En arquitectura, persigue la representación más clara y objetiva posible de elementos en los planos.

### Las distintas Normas

Se han ido desarrollando normas diferentes a lo largo de la historia en muchos países. Ahora mismo, utilizamos principalmente tres tipos de normas:

**Las normas DIN**

Son los estándares técnicos utilizados en Alemania. Es un acrónimo de "Deutsches Institut für Normung", "Instituto Alemán de Normalización. Algunas de sus normas se han internacionalizado, sobre todo en Europa, como el tamaño del papel.

**Las normas ISO**

Son las normas que establece la Organización Internacional de Normalización. Pertenecen a esta organización 140 países. Abarca todos los campos a excepción de la ingeniería eléctrica y electrónica.

**Las normas UNE**

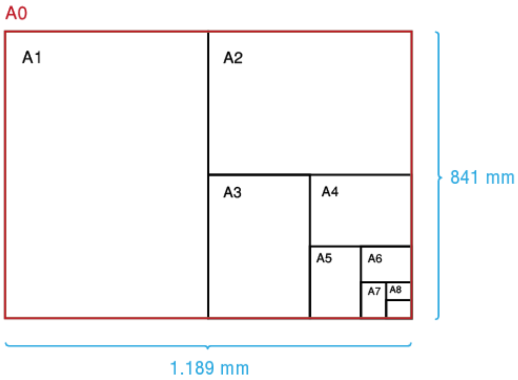
(Una Norma Española). En España se comenzó empleando las normas DIN, y muchas se han ido sustituyendo por las Normas UNE. Las genera la agencia AENOR.

### Aspectos que abarcan

Entre otros aspectos, muy numerosos, vamos a nombrar algunos de los que nos interesan más especialmente, algunos de los cuales desarrollaremos en próximos capítulos.

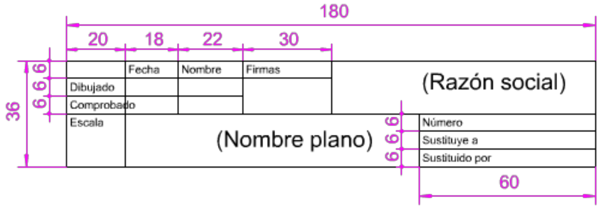
***1.*** **Formatos** de papel

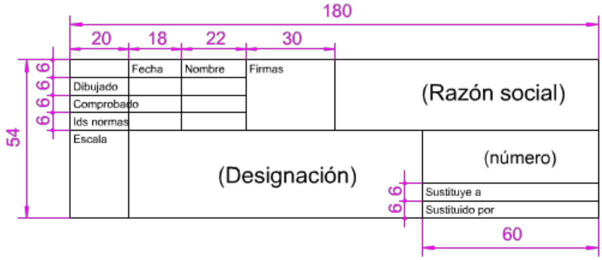
El formato es el tamaño normalizado sobre el que se realizan los planos. Se parte del tamaño DIN A0, (o UNE A0)= 841x1.189 cm=1m$^2$. Haciendo particiones por la mitad obtenemos el A1, A2, A3, A4… El formato puede ser horizontal o vertical.



## 2. Cajetines

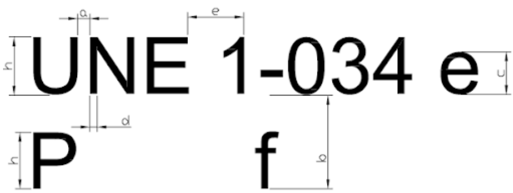
Es un espacio delimitado (generalmente rectangular) donde se ponen los datos del dibujo, autor fecha. Su posición estará en el ángulo inferior derecho, dentro del margen. Existen multitudes de posibilidades, normalizadas.




## 3. Rotulación

Las normas establecen una tipografía determinada que busca la claridad y homogeneidad. La letra debe ser clara y sencilla. Se explicará con más detalle en siguientes apartados.



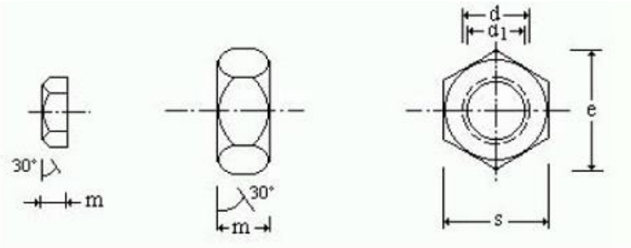

## 4. **Líneas** Normalizadas

Dependiendo de qué se quiera señalar con esa línea, existen diversos grosores y tipos de trazados. Se suelen utilizar tres grosores: fino (0,2mm), medio (0,4mm) y grueso (0,8mm). En cuando a los tipos de trazados podemos hablar entre otros de la mano alzada (para croquis), línea continua (fina, mediana o gruesa), línea discontinua (para aristas ocultas), línea de trazo punto (para ejes de simetría)

| DENOMINACIÓN | REPRESENTACIÓN GRÁFICA | USO |
|---|---|---|
| a) Llena gruesa | | Aristas visibles. contornos de esferas, planos de situación, costuras y símbolos de soldaduras, líneas de limitación de roscas,etc. |
| b) Llena estrecha | | Lineas de cota y aux. de cota, rayados, caracterización de superficies, lineas de rosca, lineas de referencia, cruces de diagonales, contorno de piezas contiguas, etc. |
| c) Trazos | | Aristas ocultas, contornos ocultos, lineas de roscas, roscas ocultas, circunferencias primitivas de pie de ruedas dentadas, cremalleras, etc |
| d) Trazo y punto gruesa | | Trazos más cortos que los de e). para lineas de recorrido de secciones. |
| e) Trazo y punto estrecha | | Circunferencias de agujeros, circunferencias primitivas de ruedas dentadas, posiciones limite de palancas, mangos o pistones, ejes de simetría, señalado de dibujos separados de detalle, cadenas, cables análogos, etc. |
| f) Mano alzada | | Para lineas de rotura en metales, materiales aislantes, piedras, etc. y en madera, así como para indicar este último material. |

## 5. **Roscas**, **tuercas** y engranajes

Se han normalizado, simplificado y unificado la representación de roscas y tuercas, para facilitar el ahorro de tiempo y esfuerzo. Ocurre lo mismo con los engranajes




# Bb.1e Ejercicios

1. Coge un papel tamaño A4. Divídelo a la mitad, obteniendo un A5. Haz lo mismo para obtener un A6 y un A7. Con una regla toma las medidas de cada trozo. Haz lo mismo a la inversa, uniendo con celo diferentes A4 para obtener un A3 y un A2.

2. En cada uno de los papeles anteriormente divididos, crea un cajetín en el lugar conveniente en el que aparezcan señalados la fecha del día en el que lo estás haciendo, tu nombre, el tamaño del papel, la carrera que vas a cursar y cualquier elemento que consideres necesario.

3. Dibuja la planta y dos alzados de tu sacapuntas, utilizando diferentes tipos de líneas, según el código que hemos visto

# Bb.2 El lápiz

## Dureza del lápiz

### Definición

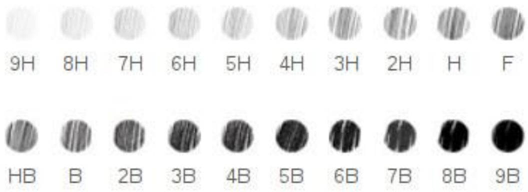
Los lápices de grafito se clasifican según la dureza de su mina. La graduación mundial utiliza una escala descrita por H, que hace referencia a la dureza (en inglés Hard = dureza) y por B, que hace referencia al grado de negro (en inglés Black = negro). La escala va desde 9H, que son los más duros, hasta los 9B que son los más blandos. Aunque la escala es estándar, hay pequeñas diferencias entre los distintos fabricantes.

Los lápices de grafito se fabrican mediante una mezcla de grafito, arcilla y cera. Las diferentes durezas se obtienen modificando la cantidad de arcilla y grafito. Cuanta más proporción de grafito lleve la mina, más blando será el lápiz, y viceversa, lápices con alto contenido de arcilla, tendrán una dureza más alta. La proporción de grafito varía desde el 40% en los lápices más duros, hasta el 90% en los lápices 9B, que son los más blandos. La proporción de arcilla varía desde el 55% en los lápices más duros (9H) hasta un 5% en los lápices más blandos (9B)

### Uso

Para el dibujo a mano alzada solemos utilizar una mina blanda, 2B o 4B. Cuando descendemos a los detalles y buscamos más precisión utilizamos un HB.

Para el dibujo técnico utilizamos minas más duras, buscando una mayor precisión, 2H o 4H.




# Bb.2e Ejercicios

1. Consigue lápices de diferentes durezas, por lo menos 2H, HB y 2B. Dibuja con el HB un paisaje que tengas a tu alrededor. Realiza el mismo dibujo con los diferentes lápices, cambiando el nivel de detalles, dependiendo de la dureza

# Bb.3 La escritura

## ☐ Rotulación

### Definición

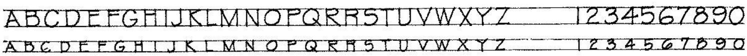
Los documentos y dibujos técnicos normalmente incluyen anotaciones, acotaciones y otras indicaciones de una pieza o forma.

En dibujo técnico a esta escritura se la denomina rotulación, y está formada de letras, números y símbolos, dispuestos de tal manera que resulten claros y de fácil lectura, evitando confusiones; además la rotulación puede ser un complemento estético del documento o dibujo.

### Rotulacion a mano

Para rotular a mano es útil servirse de tres líneas, una donde se apoyen la parte inferior de las letras, otra hasta donde llegue la parte superior y una intermedia que marque las líneas intermedias.

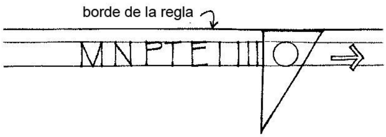
EL USO DE LÍNEAS DE GUÍA ES FUNDAMENTAL PARA QUE LAS LETRAS TENGAN UNA ALTURA UNIFORME



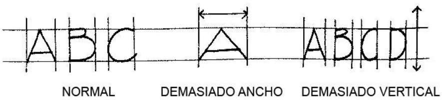

PARA QUE LAS LETRAS COMUNIQUEN Y NO DISTRAIGAN NI DESVIRTÚEN EL DIBUJO:

1º) DIBUJAR LAS LETRAS VERTICALES; UNA PEQUEÑA ESCUADRA ES UN MEDIO RÁPIDO Y EFICIENTE PARA MANTENER LOS PALOS DE LAS LETRAS VERTICALES.

(UNA ROTULACIÓN INCLINADA ES DIRECCIONAL Y GENERALMENTE DISTRAE LA ATENCIÓN EN UN DIBUJO RECTILÍNEO).




2º) MANTENER PROPORCIONES ADECUADAS PARA QUE EL ROTULADO SEA MÁS ESTABLE.




### Rotulacion a ordenador

Es importante escoger adecuadamente el estilo de tipografía a utilizar. Se pueden seguir las siguiente reglas generales, aunque con la debida justificación no hay problema con saltarlas

- Utilizar un máximo de dos o tres estilos tipográficos en una lámina. Puede ser uno para los títulos principales y otro más sencillo para elementos como la escala, el nombre de las representaciones, etc.

- Buscar una tipografía geométrica sencilla, que no llame excesivamente la atención, a no ser que se busque fijar la atención en ese elemento

- El tamaño debe ser el adecuado para ser visto, no hace falta que sea superior. Hacer pruebas de impresión para no sobredimensionar las letras

- Evitar el uso de las letras con disposición vertical. Dificultan la lectura

## Bb.3e Ejercicios

**1.** Dibuja una línea en un papel. Dibuja otra paralela a una distancia de 0,5 cm y otra encima de esta segunda a 0,25 cm. Dibuja entre estas líneas, en mayúsculas el abecedario. Dibuja tantas líneas como sea necesario para que entre.

**2.** Haz lo mismo que lo anterior con las dos líneas separadas entre sí 0,5. Dibuja el abecedario

**3.** Haz lo mismo que lo anterior con las líneas separadas entre sí al revés que en el primer ejercicio, 0,25 entre las dos inferiores y 0,5 entre las dos superiores.

# Bb.4 La escala

## ☐ La escala

### Definición

Se define la ESCALA como la relación entre la dimensión dibujada respecto de su dimensión real, esto es:

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{dimensión en el dibujo}}{\text{dimensión en la realidad}}$$

Si el numerador de esta fracción es mayor que el denominador, se trata de una escala de ampliación, y será de reducción en caso contrario. La escala 1:1 corresponde a un objeto dibujado a su tamaño real (escala natural).

### Uso

La representación de objetos a su tamaño natural no es posible cuando éstos son muy grandes o cuando son muy pequeños. En el primer caso, porque requerirían formatos de dimensiones poco manejables y en el segundo, porque faltaría claridad en la definición de los mismos.

Esta problemática la resuelve la ESCALA, aplicando la ampliación o reducción necesarias en cada caso para que los objetos queden claramente representados en el plano del dibujo.

### Escalas normalizadas

Aunque, en teoría, sea posible aplicar cualquier valor de escala, en la práctica se recomienda el uso de ciertos valores normalizados con objeto de facilitar la lectura de dimensiones mediante el uso de reglas o escalímetros.

Estos valores son:

| Escalas de reducción | | | | Escalas de ampliación |
|---|---|---|---|---|
| Fabricación e instalaciones | Construcciones civiles | Topografía | Urbanismo | |
| 1:2 | 1:5 | 1:100 | 1:500 | 2:1 |
| 1:5 | 1:10 | 1:200 | 1:2.000 | 5:1 |
| 1:10 | 1:20 | 1:500 | 1:2.500 | 10:1 |
| 1:20 | 1:50 | 1:1.00 | 1:5.000 | 20:1 |
| 1:50 | 1:100 | 1:2.000 | 1:25.000 | 50:1 |
| 1:100 | 1:200 | 1:5.000 | 1:50.000 | |
| 1:200 | 1:500 | 1:10.000 | | |
| | 1:1000 | 1:25.000 | | |
| | | 1:50.000 | | |

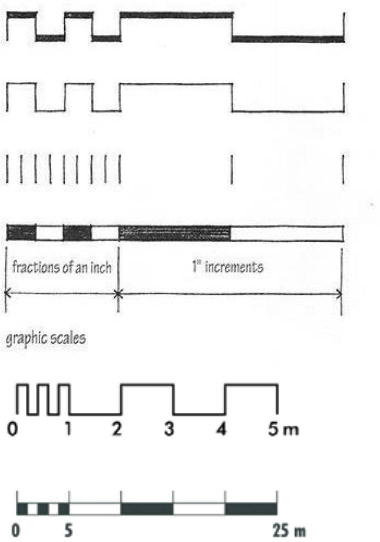
## Método 1 ■ Escala gráfica

### Definición

La escala gráfica es la representación dibujada en un mapa, carta náutica o un plano con escala unidad por unidad, donde cada segmento muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.

Se representa mediante una línea recta graduada, dividida en partes iguales, en la cual la unidad de medida representa la longitud o distancia en la realidad, y muestra cuantas unidades en la realidad equivalen a unidades del dibujo.

Se debe indicar el número y la unidad en que se está trabajando




Método 2 Escalímetro

## Definición

En la práctica habitual del dibujo, a la hora de trabajar con escalas, se utilizan los escalímetros.

La forma más habitual del escalímetro es la de una regla de 30 cm de longitud, con sección estrellada de 6 facetas o caras. Cada una de estas facetas va graduada con escalas diferentes, que habitualmente son:

1:100, 1:200, 1:250, 1:300, 1:400, 1:500


## Uso

1. Para un plano a E 1:250, se aplicará directamente la escala 1:250 del escalímetro y las indicaciones numéricas que en él se leen son los metros reales que representa el dibujo.

   En el caso de un plano a E 1:5000; se aplicará la escala 1:500 y habrá que multiplicar por 10 la lectura del escalímetro. Por ejemplo, si una dimensión del plano posee 27 unidades en el escalímetro, en realidad estamos midiendo 270 m.

2. Por supuesto, la escala 1:100 es también la escala 1:1, que se emplea normalmente como regla graduada en cm.

## Bb.4e Ejercicios

**1.** Coge un papel tamaño A4. Toma medidas de un instrumento de uso habitual, como un sacapuntas, una taza o el ratón del ordenador. Dibuja la planta y dos alzados de dicho elemento en tres escalas diferentes.

# Bb.5 Las cotas

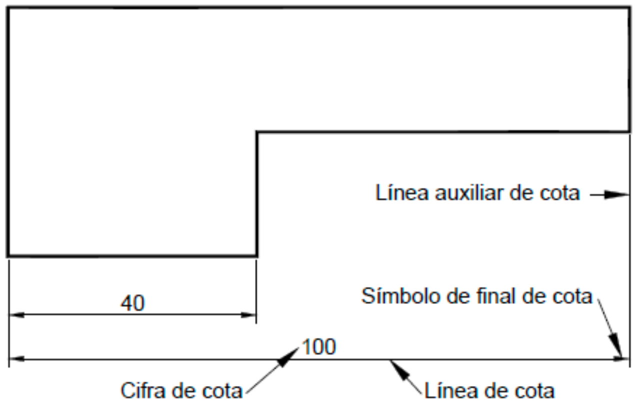
## ☐ Normalización

### Definición

La acotación es el proceso de anotar, mediante líneas, cifras, signos y símbolos, las mediadas de un objeto, sobre un dibujo previo del mismo, siguiendo una serie de reglas y convencionalismos, establecidos mediante normas.

### Normas generales

1. Una cota solo se indicará una sola vez en un dibujo, salvo que sea indispensable repetirla.
2. No debe omitirse ninguna cota.
3. Las cotas se colocarán sobre las vistas que representen más claramente los elementos correspondientes.
4. Todas las cotas de un dibujo se expresarán en las mismas unidades, en caso de utilizar otra unidad, se expresará claramente, a continuación de la cota.
5. No se acotarán las dimensiones de aquellas formas, que resulten del proceso de fabricación.
6. Las cotas se situarán por el exterior de la pieza. Se admitirá el situarlas en el interior, siempre que no se pierda claridad en el dibujo.
7. No se acotará sobre aristas ocultas, salvo que con ello se eviten vistas adicionales, o se aclare sensiblemente el dibujo. Esto siempre puede evitarse utilizando secciones.
8. Las cotas se distribuirán, teniendo en cuenta criterios de orden, claridad y estética.
9. Las cotas relacionadas. como el diámetro y profundidad de un agujero, se indicarán sobre la misma vista.
10. Debe evitarse, la necesidad de obtener cotas por suma o diferencia de otras, ya que puede implicar errores en la fabricación.
11. Las cotas deben siempre estar en medidas reales, no se cambian dependiendo de la escala.



### Algunos consejos

Deben prestar atención a la terminación de las líneas de cotas en ambos lados. Las cotas no pueden tacharse unas a otras, ni deben confundirse con las líneas del dibujo.

Fig. 2

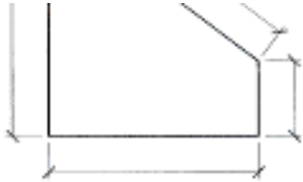
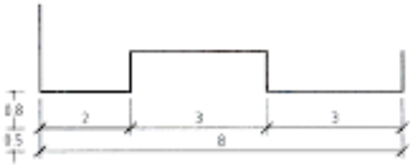


Fig. 3


Fig. 4




## Bb.5e Ejercicios

**1.** Toma los dibujos del ejercicio anterior de escalas y acota cada uno de ellos.

Cc

# Cuestiones básicas Geometría

## Paralelismo

### Definición

Las rectas planas son aquellos elementos geométricos de un mismo plano que no se cortan en un espacio finito o infinito. A estas rectas se les atribuye la palabra equidistante, que significa que todos sus puntos se encuentran a la misma distancia.

Para poder diferenciarlas en los ejercicios de la asignatura, estas rectas equidistantes se representan con el símbolo '' / / '' (dos pequeñas líneas paralelas entre sí colocadas encima de las dos rectas que cumplan la condición de paralelismo), para poder diferenciarlas de las que no cumplen estas características.

### Conceptos básicos

Unos conceptos básicos sobre esta cualidad serían:

- Dos rectas paralelas que son a la vez equidistantes a una tercera serían paralelas entre sí.
- Una recta perpendicular a otra cumple esa perpendicularidad con todas las paralelas a esa recta.
- Por un punto exterior a una recta sólo puede pasar una paralela a ella por dicho elemento.

Método 1 — Con arcos

Dados una recta (r) y un punto externo a ella (P), elegimos un punto cualquiera de la recta (M). Con el compás trazamos un arco que pase por P y que tenga centro en M. Este arco nos cortará la recta en dos puntos (A y B). Cogemos la cuerda BP y la transportamos con centro en A para conseguir otro punto en el arco (C). Uniendo P y C obtenemos la recta paralela a r (s). Fig.10

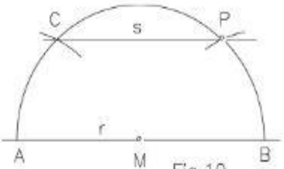


Fig.10

Método 2 — Con perpendiculares

Dados una recta (r) y un punto exterior a ella (P), trazamos con las reglas una perpendicular a r que pase por P. A continuación, trazamos una perpendicular de la recta que acabamos de trazar por el punto P, sacando la paralela de r (s). Fig.11

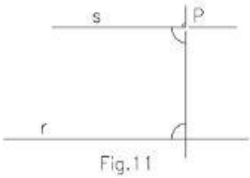


Fig.11

Ejemplo 1

### Paralela a una recta a una distancia dada

1. Por un punto cualquiera de la recta r trazamos una **perpendicular**.
2. En ella elevamos la **distancia** que nos da el ejercicio (d), obteniendo un punto (A).

3. Trazamos una **perpendicular** a la recta que hemos trazado por A, consiguiendo la recta paralela a la dada (s). Fig.12

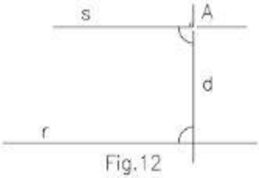


Fig.12

# Perpendicularidad

## Definición

Esta cualidad de los elementos geométricos se da cuando dos rectas o dos planos se cortan entre sí, dando lugar a un ángulo recto (90º). A estos elementos que tienen esta cualidad se les llama ortogonales.

## Conceptos básicos

- Por un punto de la recta solo puede realizarse una perpendicular.
- Por un punto exterior a la recta solo pasa una perpendicular a dicha recta.

Método 1

### Perpendicular a una recta por un punto de ella

Perpendicular a una recta por un punto de ella: cogiendo como centro cualquier punto de la recta trazamos un arco con un radio cualquiera, cortando así la recta por dos puntos (A y B). Con esos puntos definimos un segmento AB, por lo que ya solo hay que realizar la mediatriz. Fig.5

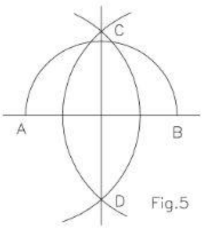


Fig.5

## Método 2 ■ Perpendicular a una recta por un punto exterior

Perpendicular a una recta por un punto exterior: con centro en el punto exterior (P) trazamos un arco que nos corte la recta por dos puntos (A y B), dando lugar al segmento AB. A partir de ahí realizamos la mediatriz del segmento AB. Fig.6

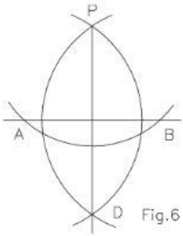


Fig.6

## Método 3 ■ Perpendicular a una semirrecta en su extremo

Perpendicular a una semirrecta en su extremo: basándonos en el teorema de Pitágoras, el cual dice que a2 + b2 = c2 (siendo c la hipotenusa del triángulo y a y b los catetos), podemos realizar la perpendicular de la semirrecta.

Para realizar un ejemplo, cogemos los valores 3, 4 y 5, los cuales cumplen con el teorema (32 + 42 = 52). En la semirrecta, desde uno de sus extremos (P) realizamos un arco de 4 cm. Desde ese extremo, realizamos otro arco de 5 cm, pero en este caso cogemos como centro C, que se encuentra a 3 cm del extremo. Estos dos arcos nos cortarán en un punto (A), que uniéndolo con el extremo P nos dará la perpendicular. Para comprobar que hemos realizado bien el ejercicio, el triángulo ACP debe ser rectángulo. Fig.7

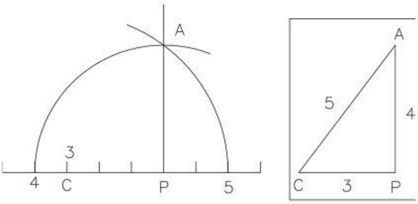


Fig.7

Estas posibilidades nos ofrecen una serie de Teoremas:

## Teorema 1 ■ Recta perpendicular a un plano

Una recta que es perpendicular a un plano, lo es también a todas las rectas que dicho plano contiene. Dichas rectas no tienen por qué pasar por la intersección recta-plano. Fig.1

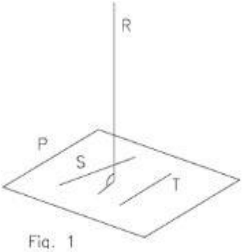



Fig. 1

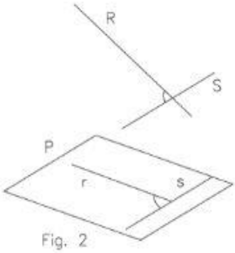



Fig. 2

Teorema 2

## Teorema de las tres perpendiculares

Si dos rectas son perpendiculares entre sí y una de ellas es paralela a un plano, las proyecciones perpendiculares de dichas rectas en el plano también son ortogonales entre sí.    Fig.2

Teorema 3

## Perpendicularidad entre planos

Si queremos que dos planos sean perpendiculares entre ellos, es necesario que uno de ellos contenga una recta que sea perpendicular al otro.    Fig.3

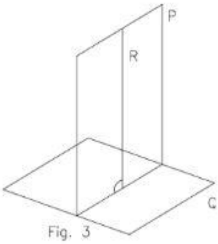



Fig. 3

# Cc.2 Los ángulos

## El Triángulo

### Definición

Un triángulo es la superficie plana limitada por tres rectas que se cortan entre sí dos a dos. Los puntos de estas intersecciones se denominan vértices y se nombran siempre en mayúsculas. Los segmentos entre dichos vértices se denominan lados y se nombran en minúsculas, coincidiendo con su vértice opuesto.

### Propiedades

Todos los triángulos comparten unas propiedades fundamentales:

- Un lado es menor a la suma de los otros dos y mayor a la resta de esos mismos.

($b - c < a < b + c$)

- Si tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son iguales también.
- Cuanto más largo sea el lado opuesto, más amplitud tendrá el ángulo.
- La suma de todos los ángulos del triángulo da siempre 180º.

Clasificación 1 — Según los lados

En el grupo de clasificación según los lados encontramos:

- Equiláteros: todos sus lados son iguales. ($a = b = c$) Fig.6
- Isósceles: tiene dos lados iguales. ($c = b$) Fig.7
- Escaleno: ninguno de sus lados es igual. Fig.8

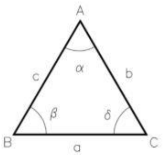



Fig.6

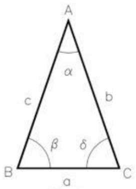



Fig.7

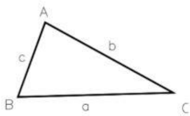



Fig.8

Clasificación 2 — Según los ángulos

En el grupo de clasificación según los ángulos encontramos:

- Acutángulo: todos sus ángulos son iguales. Fig.9
- Rectángulo: si tiene un ángulo recto. Fig.10
- Obtusángulo: si tiene un ángulo obtuso. Fig.11

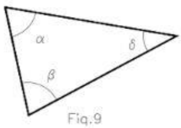



Fig.9

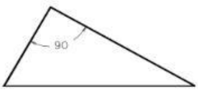



Fig.10

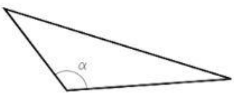



Fig.11

### Centros de los triángulos

**1. Ortocentro**

Este punto se calcula mediante la intersección de las alturas del triángulo, las cuales son las perpendiculares de los lados que pasan por el vértice opuesto a él. Fig.12

**2. Circuncentro**

Este punto se calcula mediante la intersección de las mediatrices de los lados. Estas se explican en las páginas anteriores. Este punto es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo, la cual contienen todos sus vértices en ella. Fig.13

**3. Baricentro**

Este punto se calcula mediante la intersección de las medianas. Estas son los segmentos que van desde el punto medio de los lados, los cuales se hayan mediante la mediatriz del lado, hasta el vértice opuesto. Fig.14

**4. Incentro**

Este punto se calcula mediante la intersección de las bisectrices de los ángulos. Estas se explican a continuación. Fig.15

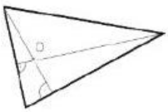



Fig.12

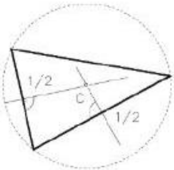



Fig.13

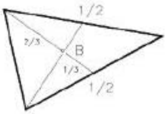



Fig.14

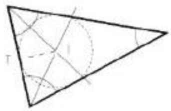



Fig.15

## Mediatriz

### Definición

La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de los extremos de dicho segmento. Esto da lugar a la división del elemento en dos partes completamente iguales mediante una recta que es ortogonal al segmento. Para realizar esta división se siguen unos pasos:

### Procedimiento

- Por los extremos del segmento AB se trazan dos arcos con un radio superior a la mitad de dicho segmento.
- Esos dos arcos se cortarán en dos puntos (C y D).
- La unión de dichos puntos da lugar a la mediatriz. Fig.4

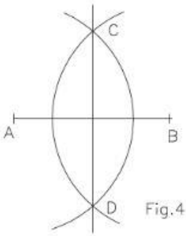



Fig.4

## ☐ Bisectriz

### Definición

La bisectriz de un ángulo es la recta que divide el ángulo en dos ángulos menores de la misma amplitud.

**Método 1** ■ Arco

Trazamos un arco de radio cualquiera desde el vértice del ángulo (O), el cual nos cortará las dos rectas que conforman el ángulo en dos puntos diferentes (A y B). Uniéndolos logramos un segmento, del cual tenemos que realizar la mediatriz. Esta recta debe de pasar perfectamente por O. Fig.23

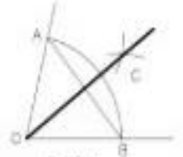


Fig.23

**Método 2** ■ Diagonales

Trazamos dos arcos de diferente radio desde el vértice del ángulo (O), consiguiendo cuatro puntos en las dos rectas que conforman el ángulo (A, B, C y D). Uniendo A con D y B con C realizamos dos rectas que se van a cortar por un punto P. Uniendo P con O logramos realizar la bisectriz. Fig.24

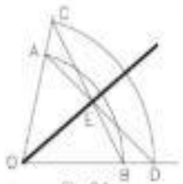


Fig.24

**Método 3** ■ Triangulación

Pueden darnos dos rectas que se cortan fuera del papel y pedirnos que realicemos la bisectriz del ángulo que forman. Para ello, realizamos paralelas de los lados a una misma distancia que permita que dichas rectas se corten dentro de nuestras dimensiones del papel. Después de conocer el vértice, realizamos cualquier de los dos métodos explicados anteriormente. Fig.25

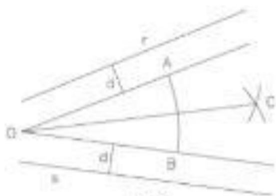


Fig.25

Método 4 ■ Bisectriz entre arco y recta

**Un arco y una recta** también pueden formar ángulos cuando se cortan, por lo cual también pueden pedirnos que realicemos la bisectriz de dicho ángulo. Para realizarlo tendremos que realizar paralelas a la recta a una misma distancia cualquiera. Con esa misma distancia, haremos arcos concéntricos al arco que nos han dado. Estos arcos y rectas se cortarán con sus correspondientes, es decir, la recta y el arco que se han realizado a la misma distancia se cortarán en un punto. Obteniendo varios puntos y uniéndolos obtendremos la bisectriz. Fig.26

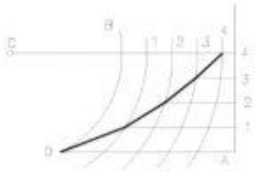


Fig.26

## Arco Capaz

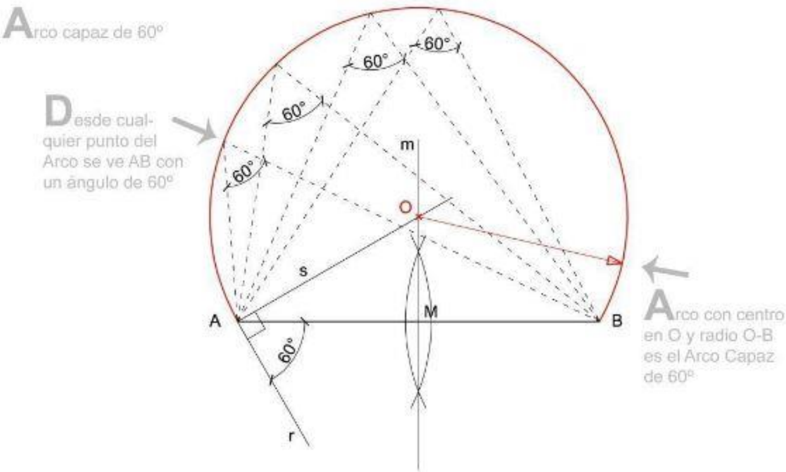
### Definición

El arco capaz es el lugar geométrico de los puntos del plano de los cuales se ven los extremos de un segmento bajo un mismo ángulo. Podemos realizar el arco capaz de cualquier ángulo que necesitemos.

### Procedimiento

Para realizar un arco capaz de 60º debemos seguir los siguientes pasos:

1. Definir el segmento AB.
2. Dibujar la mediatriz del segmento.
3. En uno de sus extremos (A), dibujar una recta r hacia abajo que forme con el segmento 60º.
4. Desde ese mismo extremo, dibujamos una perpendicular de r que nos cortará la mediatriz en O.
5. Con centro en O y radio OA o OB, trazamos una circunferencia que contenga ambos extremos. En esa circunferencia, todos los puntos que contiene formarán 60º en la visual hacia cada extremo.



# Cc.3 Proporcionalidad y semejanza

## ☐ Proporcionalidad

### Definición

La proporcionalidad es la relación que se establece entre dos figuras que tienen la misma forma, pero con distinto tamaño.

Cuando hablamos sobre proporcionalidad tenemos que conocer lo que es la razón (K). Esta es la relación entre las longitudes de ambos segmentos.

Tipo 1 ■ Directa

Una figura es directamente proporcional cuando las variaciones comparten una **razón** constante.

Tipo 2 ■ Indirecta

Una figura es inversamente proporcional cuando las variaciones son un **producto** constante.

## ☐ Teorema de Tales

### Definición

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

### Método

El teorema de Tales nos permite dividir un segmento cualquiera en tantas partes iguales como necesitemos. Para realizarlo, debemos seguir los siguientes pasos:

1. En uno de los extremos del segmento realizamos una recta cualquiera.
2. En ella, con una medida cualquiera y constante, realizamos tantas marcas seguidas como partes que queremos realizar en el segmento.
3. Unimos la última marca que hemos realizado con el otro extremo del segmento, realizando una recta.
4. Realizamos paralelas de esa recta en los demás puntos que hemos, marcado anteriormente, las cuales nos cortarán en el segmento. Así obtenemos la división en partes iguales del segmento. Fig.3

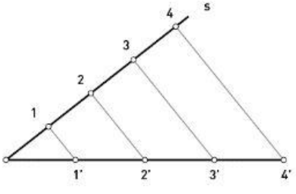



Figura 3

También se puede usar este método para dividirlo en partes proporcionales. En este caso, en vez de realizar las marcas con una misma distancia cualquiera, realizamos las divisiones sin tener la misma medida. Al realizar esto conseguimos realizar la proporcionalidad de esas medidas respecto nuestro segmento. Fig.4

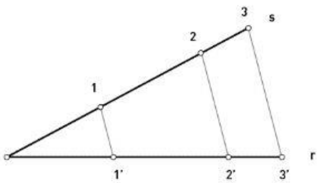



Figura 4

## ☐ Cuarta proporcional

### Definición

Con tres segmentos ya dados (a, b y c), la cuarta proporcional denomina a un segmento (d) cumple que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$**.** Es decir, que el segmento d mantiene una proporcionalidad respecto a los tres segmentos ya dados.

### Método

1. Se trazan dos rectas cualesquiera (r y s) que se cortan en un punto (O).
2. Cogemos las medidas de los segmentos a y b ya dados y los trasladamos a la recta r desde el punto O. Hacemos lo mismo con el segmento dado c y la recta s.
3. Unimos el extremo del segmento a que hemos realizado en la recta r con el extremo del segmento c de la recta s.
4. Hacemos una paralela de esa recta por el extremo del segmento b que hemos trazado en la recta r. Esta recta nos cortará en s por un punto, delimitándonos el segmento d que cumple con la cuarta proporcionalidad. Fig.5

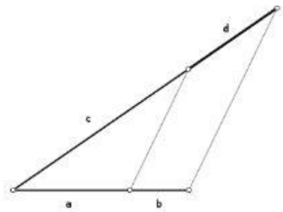



Figura 5

## ☐ Proporción áurea

### Definición

La **proporción áurea** es una relación matemática descubierta por los griegos que está presente en la naturaleza. En el dibujo técnico se encuentra en cuatro formas geométricas diferentes: el rectángulo áureo, el triángulo áureo, la estrella pentagonal y la espiral inscrita en el rectángulo áureo.

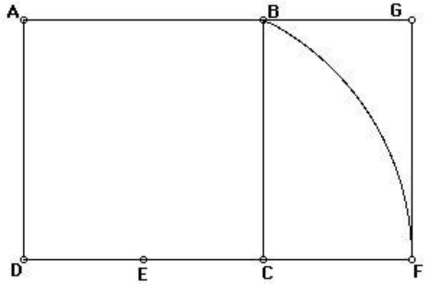
Su ecuación se expresa como 1 más la raíz cuadrada de 5, todo sobre 2, y el resultado es aproximadamente igual a **1,61803398874989...**

### Rectángulo áureo

1. Construimos un cuadrado perfecto.
2. Hallamos el punto medio (E), mediante la mediatriz, de uno de sus lados (D y C).
3. Alargamos el lado DC hacia donde queramos realizar el rectángulo.

4. Centro en E y radio EB trazamos un arco que nos cortará en F a la recta.
5. Construimos un rectángulo cambiando en vértice C por F.

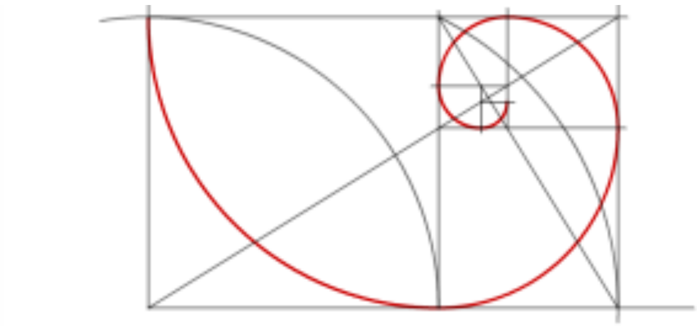
El lado AB está en **proporción áurea** con el segmento AG, o lo que es lo mismo, DC con DF




El rectángulo áureo se caracteriza en que, cuando se realiza un cuadrado en su interior que contenga dos de sus vértices, en el rectángulo sobrante se puede realizar este mismo cuadrado proporcionalmente, pudiendo realizar este ejercicio infinitamente.

### Espiral áurea

Para realizar la espiral áurea, la cual se encuentra inscrita en este tipo de rectángulo, debemos tener todos los cuadrados que queramos que cumplan lo mismo que en el párrafo anterior. Tomando como centro B y radio el lado del cuadrado, realizamos un arco. En el rectángulo que nos queda, el siguiente arco se encuentra en el cuadrado que podemos realizar en él. Esto se puede repetir tantas veces como necesitemos.



## ☐ Semejanza

### Definición

Cuando hablamos de semejanza nos referimos a figuras que tienen sus lados y sus ángulos proporcionales. Por lo que podemos decir que la razón de semejanza es la relación de proporcionalidad entre segmentos homólogos, es decir, entre segmentos semejantes ($K = \frac{A'B'}{AB}$).

Las figuras semejantes pueden estar alineadas con un punto que no varía (O), estas figuras adquieren la característica de ser homotéticas, siendo este punto el centro de la homotecia.

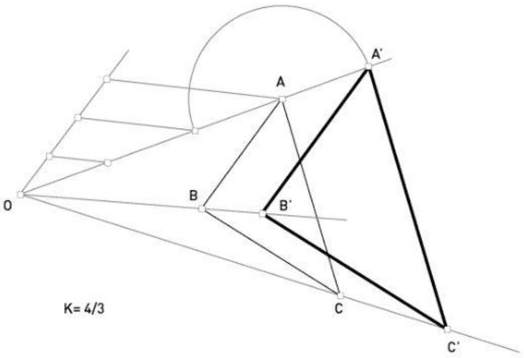
### Triángulos semejantes

Cualquier figura puede ser semejante a otra, pero hay unas como los triángulos que deben cumplir unas características. Para que dos triángulos sean semejantes tienen que cumplir alguna de las siguientes características:

- Tener dos ángulos respectivamente iguales.
- Tener dos lados proporcionales y, por ende, tener el ángulo que comprenden dichos lados igual.
- Tener los tres lados iguales.

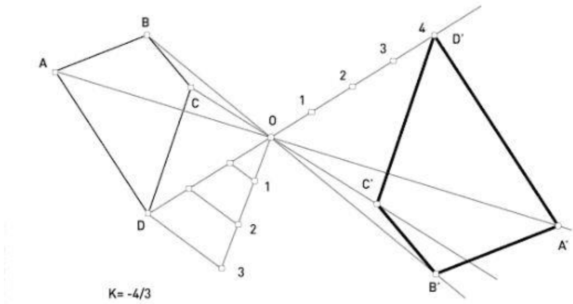
## Ejemplo 1 Figura semejante a la dada

1. Ubicamos el centro de la homotecia (O) donde queramos, a no ser que el ejercicio ya lo de, que en ese caso se usará el dado.
2. Unimos ese centro con los vértices de la figura, en este caso con los tres vértices del triángulo.
3. En uno de los segmentos que hemos formado, realizando el teorema de Tales, lo dividimos en tantas partes como nos diga la razón. En este caso, la razón es: K = 4 / 3. Por ello, dividimos el segmento en tres partes iguales.
4. Como K = 4 / 3, cogemos la medida de una de las divisiones del segmento que hemos realizado y la añadimos.
5. En el punto que hemos conseguido al añadir esa medida, realizamos mediante paralelas el mismo triángulo que nos han dado. De esa forma conseguimos el triángulo semejante al que nos dan que cumple con la razón que nos piden. Fig.40




## Ejemplo 2 Semejanza de valor negativo

Nos pueden dar la razón de semejanza de valor negativo, pero se sigue resolviendo exactamente igual, exceptuando el lugar en donde se coloca la figura. En este caso K = -4 / 3. Debido a eso, en vez de sumar otra división como hemos hecho antes, debemos de cambiar el sentido del traslado. Como es -4, nos llevamos cuatro veces esa división desde el punto O en la dirección negativa de la homotecia. Fig.41



# Cc.4 Transformaciones geométricas

## ☐ Giros

### Definición

Consiste en mover una figura o recta alrededor de un punto fijo O al que se le otorga el nombre de centro de giro. Esta acción puede realizarse en los dos sentidos (positivo o negativo) y a un ángulo determinado.

### Método

Para realizar un giro conociendo el centro y el ángulo, se siguen los siguientes pasos:

1. Unimos uno de los vértices de la figura (A) al centro del giro (O).
2. Trasladamos el ángulo dado a la recta que hemos realizado (AO).
3. Sobre la semirrecta que hemos realizado con el ángulo, pasamos la distancia AO sobre ella consiguiendo el punto A girado (A’).
4. Realizamos lo mismo con todos los demás puntos y construimos la figura. Fig.24

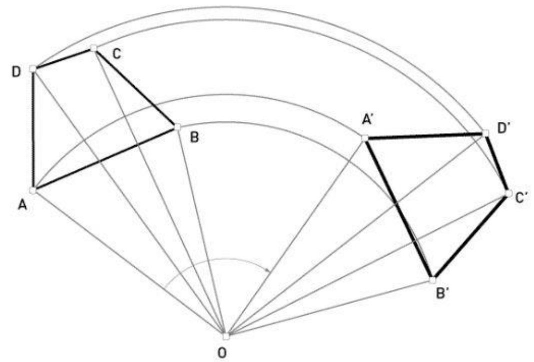



FIG 24. GIRO DE UNA FIGURA CONOCIENDO EL CENTRO Y EL ÁNGULO DE GIRO

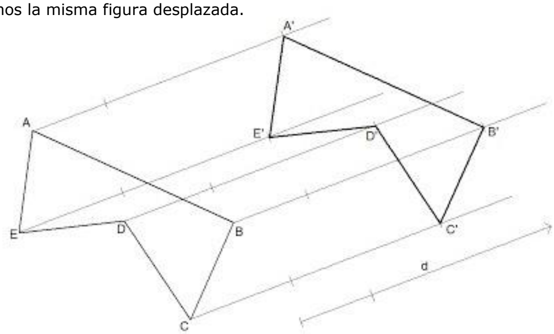
## ☐ Traslación

### Definición

Esta transformación geométrica es un movimiento rectilíneo que, dependiendo de la dirección en la que se quiera hacer, se desplazan los puntos de una figura o recta la misma distancia.

### Método

Nos dan una figura y un vector de traslación, el cual nos dirá la dirección a la que desplazaremos la figura. Mediante paralelas de ese mismo vector, copiaremos dicha recta en cada uno de los vértices de la figura, sin variar la dimensión de dicha recta. Esto nos dará diferentes puntos que al unirnos construiremos la misma figura desplazada.



# Simetría

## Definición

Esta transformación geométrica consiste en realizar una figura exactamente igual a la dada respecto a un punto (simetría central) o una recta (simetría axial).

| Tipo 1 |
|---|

### Simetría central

Cuando hablamos sobre la **simetría central,** dos puntos A y A' son simétricos respecto al punto O cuando están alineados con dicho punto y están a la misma distancia. Para realizar la simetría central de una figura, unimos todos los puntos con el centro de la simetría. Esas rectas las alargamos y, respectivamente, trasladamos las distancias de cada punto por el lado contrario de donde está la figura. Así conseguimos, mediante paralelas, realizar la simetría central.

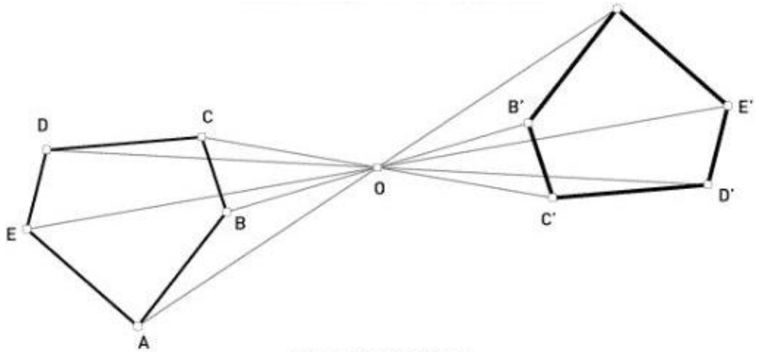
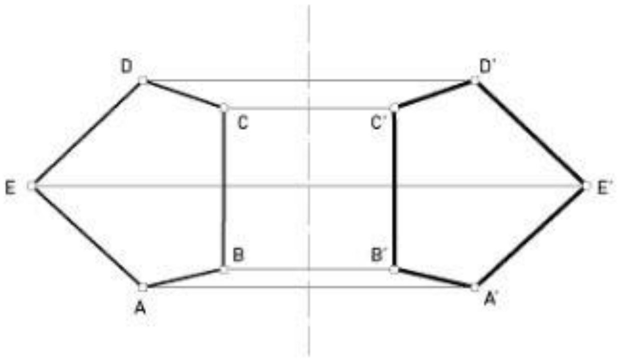



FIG 22. SIMETRÍA CENTRAL

| Tipo 2 |
|---|

### Simetría axial

En cambio, cuando hablamos sobre la **simetría axial,** dos puntos son simétricos respecto a un eje cuando se encuentran en una perpendicular de dicho eje y que equidistan de él. Para realizar esta simetría, se hacen perpendiculares del eje por todos los vértices de la figura, y se traslada la distancia de cada punto al eje al otro lado. Mediante paralelas damos forma a la figura y ya terminamos la simetría.



# ☐ Homología

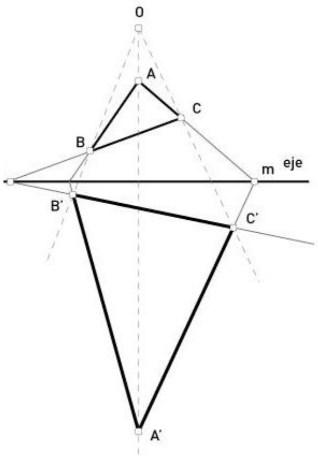
### Definición

La homología es una transformación geométrica de una figura en otra coplanaria (que se encuentra en el mismo plano) de tal modo que se corresponden punto a punto y recta a recta respetando los siguientes puntos:

- Dos puntos homólogos están alineados a otro punto fijo denominado centro de homología.
- Dos rectas homólogas se cortan en un mismo punto en una recta fija llamada eje de homología.

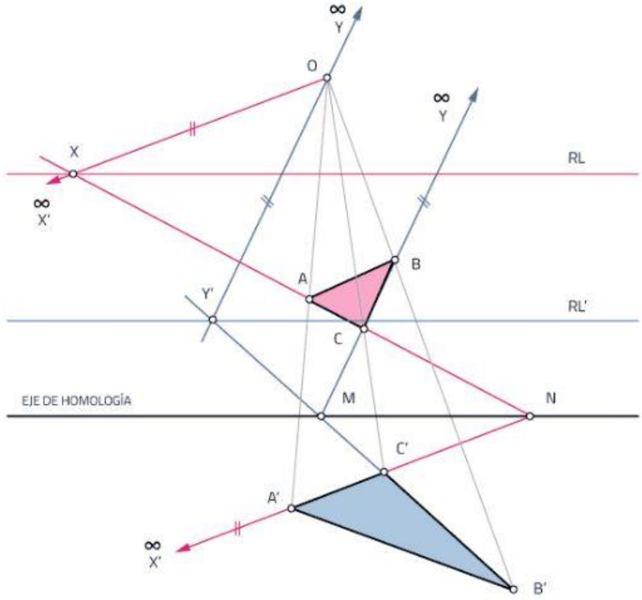
### Elementos

- Centro de homología (O)
- Eje de homología (eje)
- Puntos homólogos (A – A’)
- Rectas límite (RL – RL’)




### Procedimiento

1. Se traza, por el centro de la homología (O), una recta paralela a un lado homólogo (A’ C’) y se prolonga el lado (AC) hasta que se corten en un punto (X).
2. Se traza una paralela del eje de homología por el punto X, obteniendo la recta límite (RL).




## Método 1 ■ Eje, centro y punto homólogo

Si tenemos el eje, el centro y un punto homólogo de la figura, realizamos los siguientes pasos:

1. Unimos el centro (O) con todos los puntos de la figura dada y alargamos.
2. Prolongamos las rectas que forman los lados de la figura (AC y BC) hasta que nos toquen el eje de la homología. Estas rectas nos darán los puntos M y N.
3. Unimos N con A' y nos dará la recta homóloga de AC (A'C').
4. Unimos M con C' y nos dará la recta homóloga de BC (B'C').
5. Terminamos de cerrar la figura homóloga.

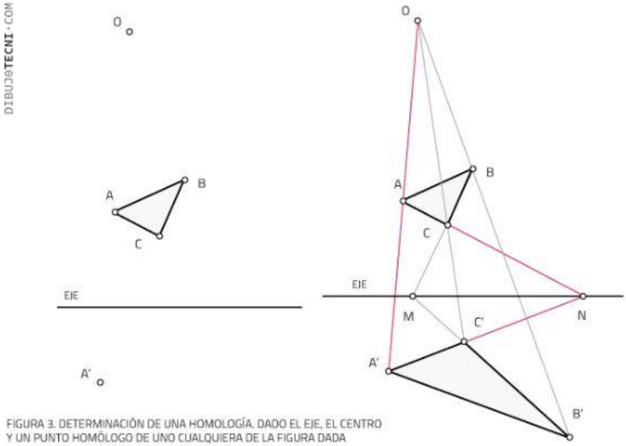



FIGURA 3. DETERMINACIÓN DE UNA HOMOLOGÍA. DADO EL EJE, EL CENTRO
Y UN PUNTO HOMÓLOGO DE UNO CUALQUIERA DE LA FIGURA DADA

## Método 2 — Eje, centro y recta límite

Si tenemos el eje de homología, el centro y una recta límite de la figura, podemos realizar los siguientes pasos:

1. Prolongamos una de las rectas de la figura (AC), que cortando a la recta límite (RL) nos da el punto X y cortando con el eje nos da el punto N.
2. Unimos O con todos los vértices de la figura y alargamos.
3. Unimos X con O y hacemos una paralela de esta en el punto N. Esta recta nos dará la recta homóloga de AC (A'C').
4. Alargamos BC y nos dará un punto en el eje (M).
5. Unimos este punto con C' y nos dará la recta homóloga de BC (B'C').
6. Terminamos de cerrar la figura homóloga.

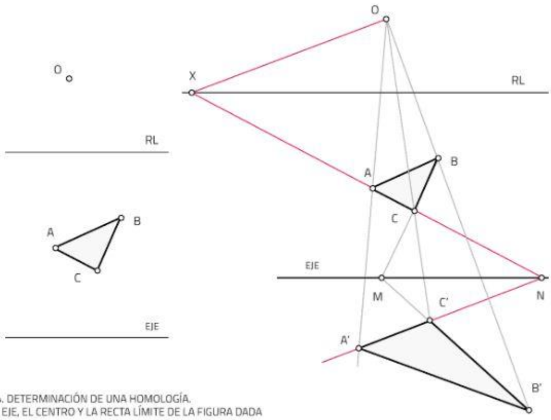



FIGURA 4. DETERMINACIÓN DE UNA HOMOLOGÍA.
DADO EL EJE, EL CENTRO Y LA RECTA LÍMITE DE LA FIGURA DADA

## Afinidad

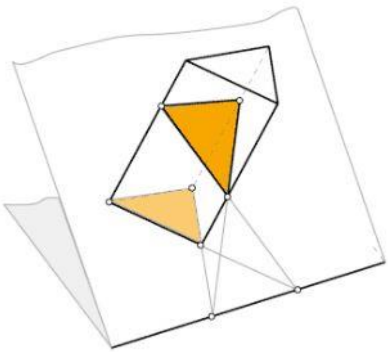
### Definición

La afinidad es un caso particular de la homología. Esta es una homología que tiene el centro en el infinito.

### Elementos

Los elementos principales de este subgrupo de la homología son:

- Rectas dobles: AA', BB'
- Rectas afines: BA de A'B'
- Puntos afines: A de A'
- Eje de afinidad: E
- Dirección de afinidad: AA'
- Razón de afinidad: K = Ax / A'x
- Origen de distancias en el eje.



LA SECCIÓN PRODUCIDA EN EL PRISMA POR UN PLANO SECANTE ES AFÍN A SU BASE. EL EJE EN ESTA AFINIDAD ES LA TRAZA HORIZONTAL DEL PLANO SECANTE

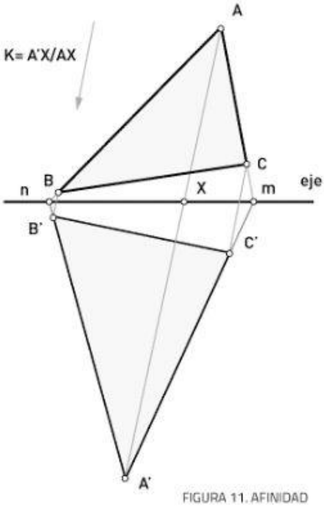



FIGURA 11. AFINIDAD

### Método 1 ■ Eje y dos puntos afines

Cuando tenemos el eje y dos puntos afines, para calcular la afinidad de otro punto dado realizamos los siguientes pasos:

1. Unimos A con A', obteniendo la dirección de afinidad.
2. Trazamos una paralela de la dirección que acabamos de hallar por B.
3. Unimos A con B y alargamos hasta cortar el eje, obteniendo así el punto doble M.
4. Unimos A' con M y nos cortará en la recta que hemos trazado en B en otro punto (B'), el cuál es el punto afín de B.

Método 2 ■ Afinidad con dos puntos alineados

Cuando tenemos la afinidad determinada por AA' cuando los dos puntos están alineados, podemos realizar los siguientes pasos:

1. Con un punto (P) cualquiera exterior a la recta AA', determinamos su punto homólogo (P'), realizando el ejercicio anterior.
2. Tomando ayuda de este punto exterior, realizamos como en el ejercicio anterior explicado el homólogo de B (B').

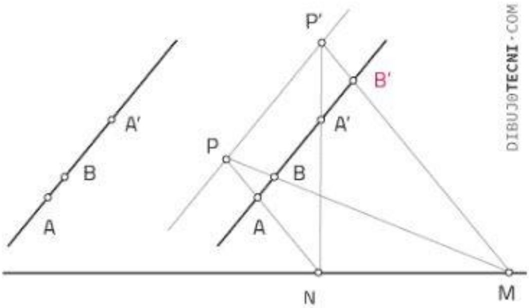



FIGURA 13. AFINIDAD

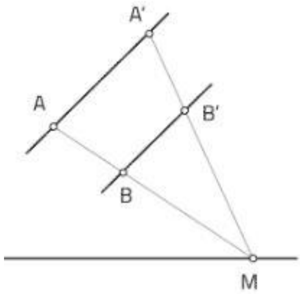



FIGURA 12. AFINIDAD

# Cc.5 Curvas cónicas

## ☐ Elipse

### Definición

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que **la suma de las distancias a otros dos puntos fijos** (r+r’), llamados focos, es **constante**

Una elipse es una curva cónica plana, cerrada y simétrica respecto a sus dos ejes (mayor y menor), los cuales son perpendiculares entre sí. Cada elipse tiene un eje mayor, el cual se designa 2a y que contiene los focos de la elipse, y un eje menor, el cual se designa 2b y es perpendicular al anterior. También toda elipse tiene dos focos, los cuales se encuentran separados por una distancia focal, la cual se designa como 2c. En estos focos, podemos realizar las circunferencias focales, las cuales tienen como radio la longitud total del eje mayor.

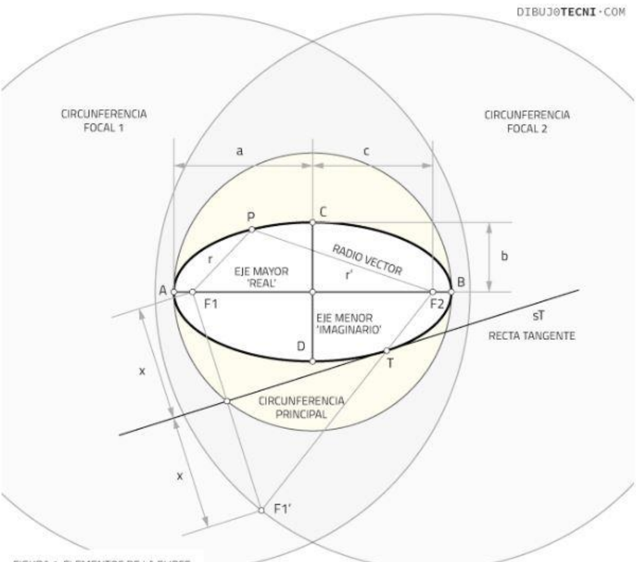
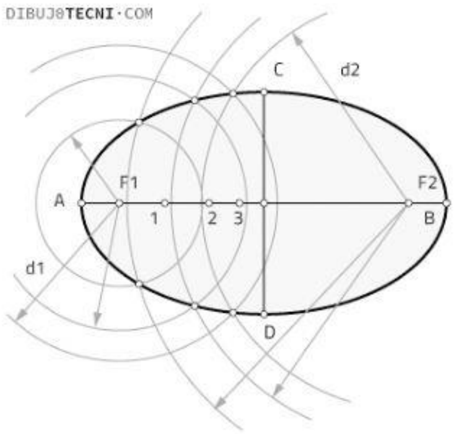


FIGURA 1. ELEMENTOS DE LA ELIPSE

Ejemplo ■ **Elipse mediante puntos**

1. Dibujamos los ejes de la elipse y determinamos los focos. Para ello, desde uno de los vértices del eje menor, trazamos un arco de radio la mitad del eje mayor.
2. Situamos puntos arbitrariamente entre uno de los focos y en centro de la elipse (1, 2, 3…)
3. Con radio A-1 y B-1, realizamos cuatro arcos con centro respectivamente a la distancia de donde hemos cogido. Esto nos dará cuatro puntos de la elipse. Estos puntos serán simétricos entre ellos dos a dos.
4. Realizamos esto tantas veces como puntos arbitrarios hayamos realizado.
5. Cuando tengamos todos los puntos realizados, unimos los puntos entre sí y realizaremos la elipse.

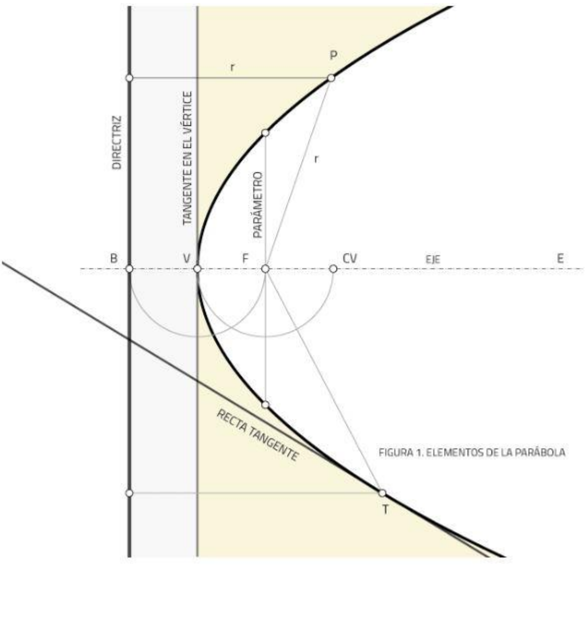



## ☐ Párabola

### Definición

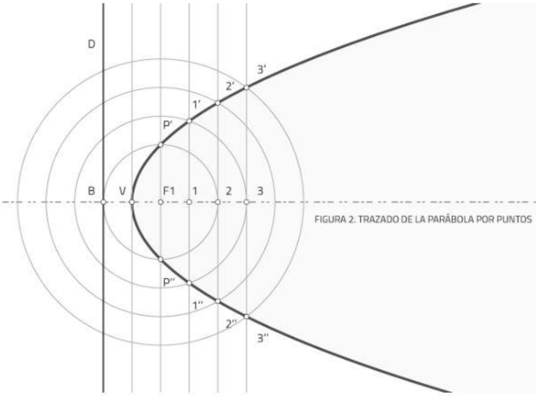
Es el lugar geométrico de los puntos de un plano **equidistantes a una recta dada**, llamada directriz, y **a un punto fijo** que se denomina foco.

Una parábola es una curva cónica abierta, plana y de una sola rama. Toda parábola tiene un foco (F) y una directriz. Cuentan con un eje de simetría (E), el cual es perpendicular a la directriz y contiene al foco. El vértice (V) de la parábola es el punto de la intersección de la parábola con el eje, cuya tangente es paralela al eje. El parámetro (P), el cual es la longitud de la cuerda que pasa por el foco, es paralelo a la directriz. En cambio, el semiparámetro mide lo mismo que la longitud entre F y la directriz. En cuanto a las circunferencias que se pueden encontrar en la parábola, podemos destacar la focal y la principal. La circunferencia focal coincide con la directriz. En cambio, la principal coincide con la recta tangente en V a la parábola.



Ejemplo **Parábola con la directriz y el foco**

1. Dibujamos el eje, el cual es perpendicular a la directriz pasando por F, y determinamos V, el cual se haya en la mediatriz del segmento BF.
2. Graduamos el eje a partir de F y en sentido opuesto a V en tantas partes como queramos, sin tener que ser de la misma longitud.
3. Con centro en F y radio 1B trazamos una circunferencia. Esta cortará en la paralela a la directriz realizada en el punto 1, dando dos puntos simétricos de la parábola.
4. Realizamos el paso anterior en todos los demás puntos que hayamos dibujado,
5. Unimos todos los puntos para formar la parábola.




## Hipérbola

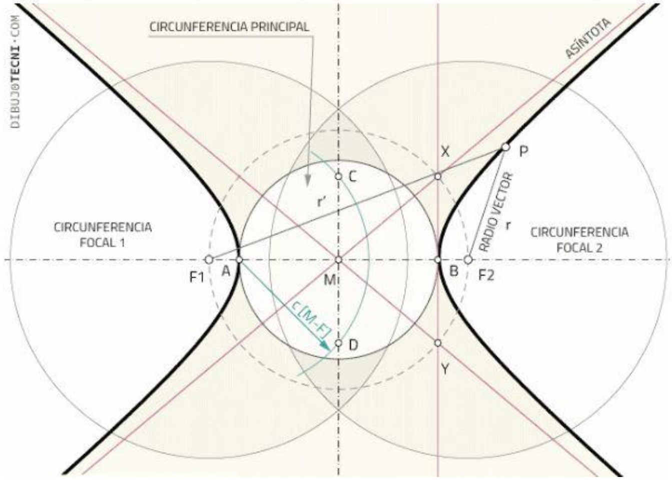
### Definición

Una hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano en el que la diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados **focos,** F y F', es siempre constante.

Una hipérbola es una curva cónica abierta, plana y de dos ramas definidas. Toda hipérbola tiene un eje mayor, de magnitud 2a siendo a la distancia de un vértice al centro de la curva o intersección de los dos ejes, y un eje imaginario. Los vértices son los puntos de la intersección de la hipérbola con el eje mayor.

La distancia focal, como bien dice el nombre, es la distancia comprendida entre los dos focos. Las circunferencias focales son aquellas que tienen centro en los focos y tienen como radio la magnitud del eje mayor (2a). La circunferencia principal es la que tiene centro en O y diámetro la distancia focal.

Finalmente, las asíntotas son las rectas tangentes a la curva en el infinito, las cuales pasan por el centro M y forman un ángulo de 45º con los ejes.

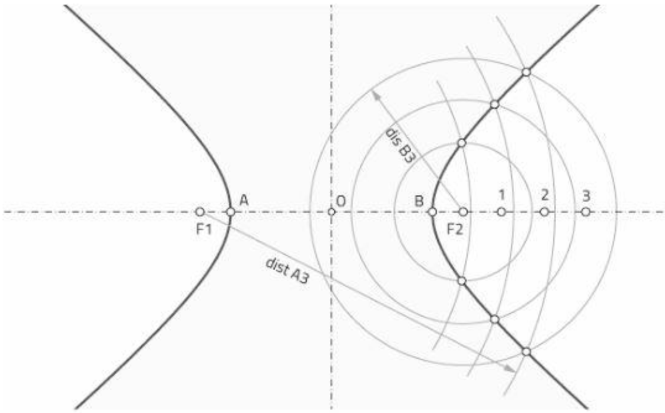



Ejemplo

## Hipérbola con vértices y focos

Para trazar una hipérbola necesitamos saber los vértices y los focos. Para realizarla, tenemos que seguir los siguientes pasos:

1. Graduamos el eje mayor arbitrariamente a partir de uno de los focos y en sentido opuesto al centro.
2. Trazamos circunferencias con centro en F1 y radios PIA, P2A, P3A….
3. Trazamos circunferencias con centro en F2 Y radios P1B, P2B, P3B…
4. Las circunferencias realizadas se cortarán con sus correspondientes en dos puntos simétricos respectivamente.
5. Uniendo esos puntos se consigue realizar la hipérbola.
6. Del mismo modo se realizará en el otro lado, debido a que tiene dos ramas.



# Cc.6 Curvas técnicas

## ☐ Óvalo

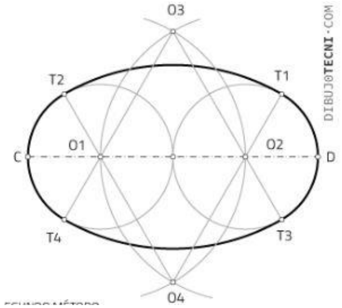
Definición

Un óvalo es una curva cerrada y plana compuesta por un número par de arcos de circunferencia enlazados entre sí y simétricos respecto sus ejes mayor y menor, los cuales son perpendiculares entre sí.

Ejemplo ■ Óvalo conociendo el eje mayor

Para construir un óvalo conociendo el eje mayor tenemos que seguir los siguientes pasos:

1. Dividimos el eje mayor en cuatro partes iguales. Así obtenemos los centros O1 y O2.
2. Realizamos dos arcos con centro en los extremos C y D y radio CO2 y DO1. Estos dos arcos se nos cortarán dándonos dos puntos: O3 y O4.
3. Con centro en O1 Y O2 realizamos dos circunferencias de radio ¼ del eje mayor.
4. Unimos O3 y O4 con O1 y O2 hasta que nos corten en las circunferencias que hemos trazado antes, definiendo los puntos de tangencia.
5. Con centro en O3 y radio O3T4 trazamos un arco para cerrar la parte de debajo del óvalo.
6. Con dentro en O4 y radio O4T2 trazamos un arco para cerrar la parte superior del óvalo, y así terminamos de definir el óvalo.




## ☐ Ovoide

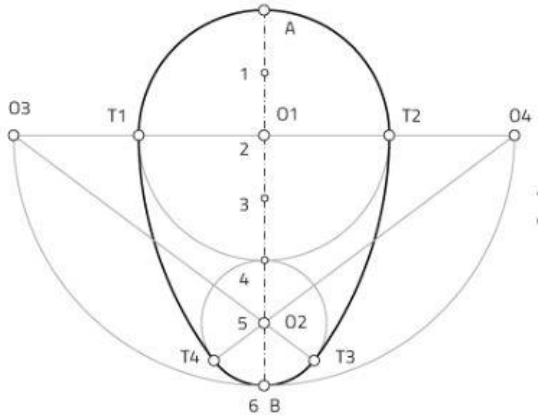
Definición

Es una curva cerrada y plana compuesta por dos arcos de circunferencia de un mismo radio y otros dos arcos de distinto radio, uno de ellos siendo una semicircunferencia. Tiene un eje de simetría que contiene a los centros de los arcos de diferente radio. Además, cuando hablamos sobre el diámetro del ovoide, nos referimos al diámetro de la semicircunferencia perpendicular al eje.

Ejemplo ■ Ovoide conociendo su eje

1. Dividimos el eje AB en seis partes iguales. De estas, cogemos las partes 2 y 5 para determinar los centros O1 y O2 de la semicircunferencia y del arco desigual.
2. Cogemos centro en 2 y, con un radio de 2B, trazamos un arco que nos cortará en la perpendicular al eje por 2 en dos pintos diferentes: O3 y O4. Estos puntos serán los centros de los arcos iguales.
3. Con centro en 2, trazamos la semicircunferencia de radio 2ª.

4. Con centro en 5 trazamos un arco de radio 5B.
5. Unimos O3 y O4 con O2 para determinar, en el arco que hemos trazado, los puntos tangentes de los arcos iguales. (T3 y T4)
6. Centro en O3 y radio T3 trazamos un arco que nos cierre el lado derecho del ovoide.
7. Centro en O4 y radio T4 trazamos un arco que nos cierre el lado izquierdo del ovoide.



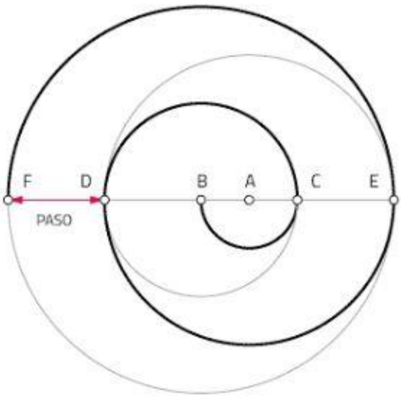

## Espiral

Definición

Las espirales son curvas abiertas y planas generadas por el movimiento de un punto que se aleja de otro u otros fijos a los que llamamos centros.

### Ejemplo 1 — Espiral de dos centros A y B

1. Unimos ambos puntos y los alargamos en ambos sentidos.
2. Hacemos centro en A y realizamos una semicircunferencia de radio AB, haciendo que nos corte a la recta que hemos trazado en C.
3. Hacemos dentro en B y realizamos una semicircunferencia de radio BC, haciendo que nos corte a la recta en D.
4. Hacemos centro en C y realizamos una semicircunferencia de radio CD, haciendo que nos corta a la recta en E.
5. Así hasta donde queramos prolongar la espiral.




Ejemplo 2 ■ Espiral de tres centros A, B y C

Para realizar una espiral de tres centros, conociendo los tres puntos, debemos seguir los siguientes pasos:

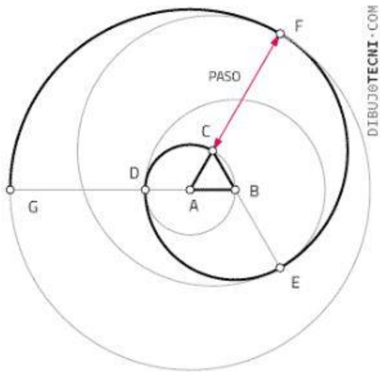
1- Conociendo el triángulo, alargamos los tres lados del triángulo hasta donde veamos necesario.

2- Hacemos centro en unos de los vértices (A) y con radio AC realizamos un arco que nos cortará en la recta alargada de A en D.

3- Hacemos centro en B y con radio BD realizamos un arco que nos cortará en la recta alargada de B en E.

4- Hacemos centro en C y con radio CE realizamos un arco que nos cortará en a la recta alargada de C en F.

5- Así hasta que consigamos la espiral que buscamos.



# Cc.7 Tangencias básicas

Definición

Las tangencias son líneas, curvas y superficies que se tocan entre sí en uno o varios puntos sin llegar a cortarse. Tenemos bastantes tipos para realizar cualquier figura que nos pidan.

## Caso 1 ■ Recta tangente a una circunferencia en un punto de ella:

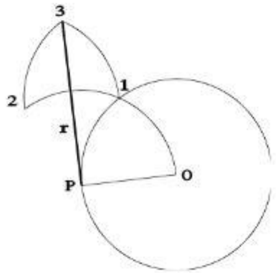
1. Trazamos una recta cualquiera que pase por el centro de la circunferencia y que nos corte por un punto (P).

2. Con el mismo radio de la circunferencia, trazamos un arco con centro en P.

3. Ahora, con centro en O, trazamos otro arco que nos cortará por un punto (1) al arco que hemos realizado anteriormente.

4. Con centro en 1, volvemos a trazar otro arco y nos cortará por otro punto (2).

5. Unimos 1 y 2 consiguiendo un segmento, que al hacer su mediatriz se haya la tangente de la circunferencia.

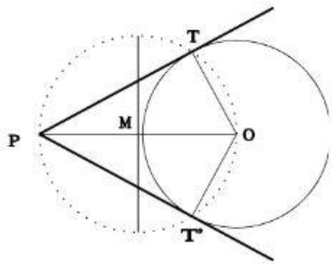



## Caso 1 ■ Recta tangente a una circunferencia desde un punto exterior:

1. Unimos el centro O con el punto exterior P.

2. Trazamos la mediatriz y, con centro en ese punto, trazamos una circunferencia que contenga a P y a O.

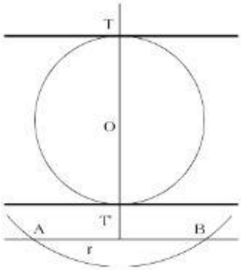
3. Esta circunferencia nos cortará en dos puntos a la circunferencia inicial que, uniéndolos a P, obtendremos las dos rectas tangentes a la circunferencia que pasan por P.



Caso **1** ■ Recta tangente a una circunferencia y paralelas a una dirección dada:

1. Trazamos una recta normal que pase por el centro O y que nos corte por dos lados de la circunferencia.

2. Estos puntos serán los puntos tangentes a la circunferencia. Trazando perpendiculares a la recta trazada por dichos puntos conseguimos las tangencias.




Caso **1** ■ Recta tangente comunes exteriores a dos circunferencias dadas

1. Unimos ambos centros consiguiendo una recta.

2. Trazamos la mediatriz de dicha recta, y con centro en ella realizamos una circunferencia que contenga ambos centros.

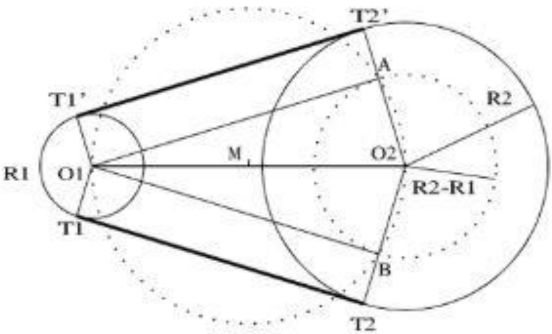
3. Trazamos otra circunferencia de radio O2 – O1 (radio mayor -radio menor) con centro en el centro de la circunferencia de radio mayor.

4. Las dos circunferencias que hemos trazado se cortarán en dos puntos diferentes (A y B).

5. Unimos estos puntos con el centro de la circunferencia de radio mayor y alargamos, consiguiendo T2 y T2'.

6. Hacemos paralelas de estas rectas por el centro de la circunferencia de radio menor y nos darán dos puntos: T1 y T1'.

7. Unimos T1 con T2 y T1' con T2', consiguiendo las tangencias.



Caso **1**

## Recta tangente común interior a dos circunferencias de distinto radio

Para realizar este ejercicio, se siguen los mismos pasos que en el ejercicio anterior exceptuando que en vez de restarse los radios de las dos circunferencias dadas, se suman.